

1. Sinüs Akım ve Gerilim

$$v(t) = V_m \cdot \sin(\omega t + \theta)$$

$$\omega t = \left(\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right) \cdot \text{s} = \text{rad}$$

$$\text{derece} = (\omega t) \frac{180}{\pi}$$

$$\omega = 2\pi f \quad f = \text{frekans (Hz)}$$

V_m = maksimum değer, ω =açısal hız (rad/s) ve θ = sifıra göre faz açısıdır.

$V(t)$ değerini hesaplarken, θ derece ise, (ωt) dereceye çevrilir ve θ ile toplanır. Ya da θ radyana çevrilir ve radyan modunda (ωt) ile toplanarak işlem yapılır.

Örnek:

$v(t)=100\sin(4000.t+30^\circ)$ 'nin $t=0.1$ s 'deki değerini bulunuz.

$$v(t) = 100 \cdot \sin(4000 \cdot (0.1) \cdot \frac{180}{\pi} + 30)$$

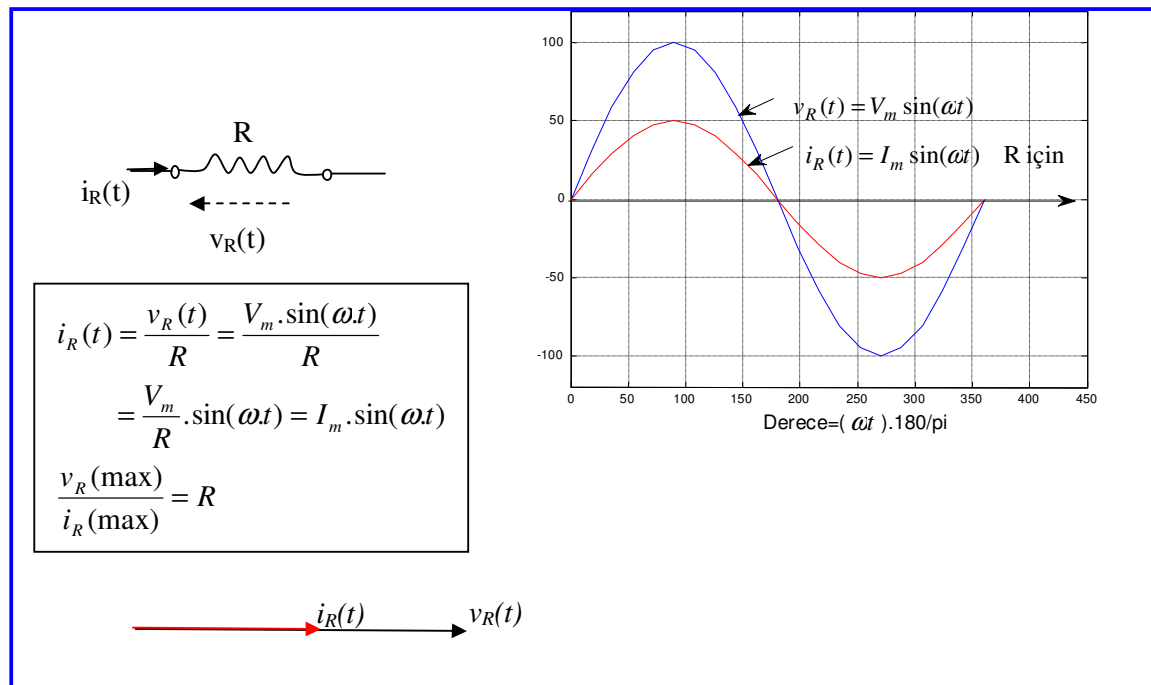
$$\pi = 3.14 \quad v(t) = 100 \cdot (-0.99) = -99 \text{ V.}$$

Empedans (Z):

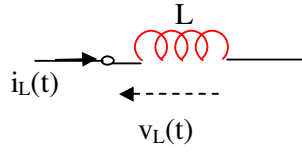
AC sin. devrelerinde bir sistemin empedansı aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$\text{empedans} = Z = \frac{V(\text{max})}{I(\text{max})} = \frac{\sqrt{2} \cdot V_{rms}}{\sqrt{2} \cdot I_{rms}} = \frac{V_{rms}}{I_{rms}} = \frac{V}{I} \quad V_{rms} \text{ ve } I_{rms} \text{ etkin değerlerdir.}$$

R 'de sinüs akım ve gerilim



L 'de sinüs akım ve gerilim



$$v_L(t) = L \cdot \frac{di_L(t)}{dt}$$

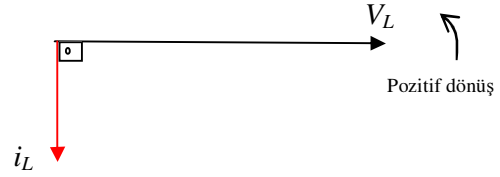
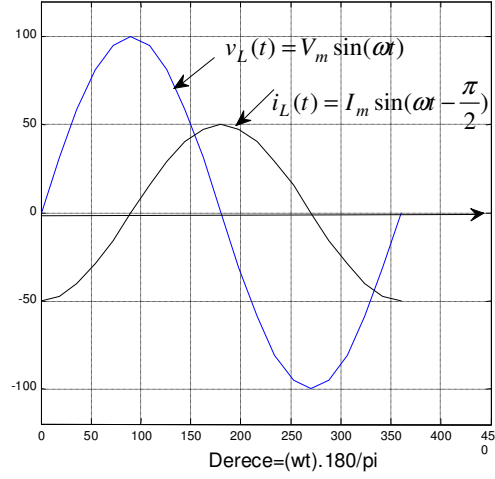
$$i_L(t) = \frac{1}{L} \int v_L(t) \cdot dt = \frac{1}{L} \int V_m \cdot \sin(\omega t) \cdot dt$$

$$i_L(t) = \frac{1}{\omega L} \cdot V_m \cdot (-\cos(\omega t))$$

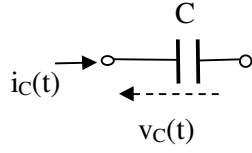
$$= \frac{V_m}{\omega L} \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$= I_m \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{v_L(\max)}{i_L(\max)} = \omega L$$



C 'de sinüs akım ve gerilim



$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int i_C(t) dt$$

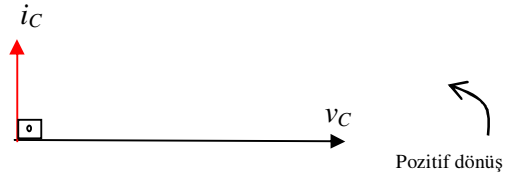
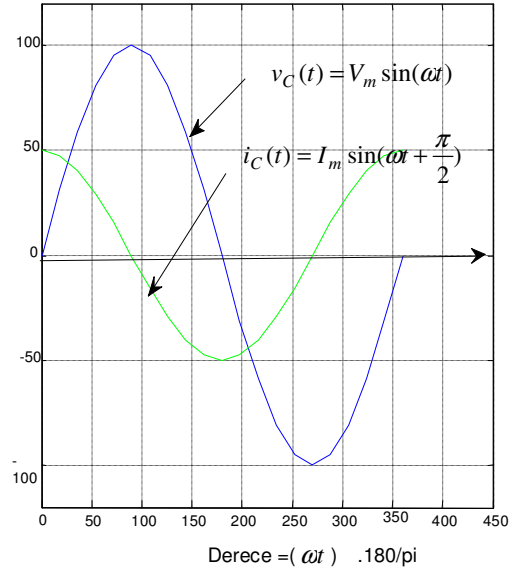
$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} = C \frac{d(V_m \sin(\omega t))}{dt}$$

$$= (\omega C) V_m \cos(\omega t)$$

$$= (\omega C) V_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

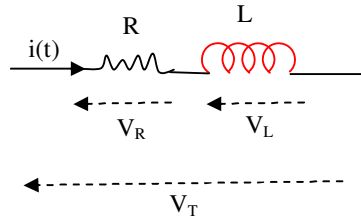
$$= I_m \sin(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

$$\frac{v_C(\max)}{i_C(\max)} = \frac{1}{\omega C}$$



Temel Örnekler**Örnek:**

Aşağıda seri bir RL devresinden $i(t) = I_m \sin(\omega t)$ geçiyorsa uygulanmış toplam gerilimi v_T 'yi tek bir sin. Fonksiyonu şeklinde gösteriniz.

**Hatırlatmalar:**

$$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cdot \cos b + \sin a \cdot \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cdot \cos b + \sin b \cdot \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cdot \cos b - \sin b \cdot \cos a$$

$$v_T = v_R + v_L$$

$$= R.I_m \sin(\omega t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} = R.I_m \sin(\omega t) + (\omega L) \cdot I_m \cos(\omega t)$$

$$v_T = A \sin(\omega t + \theta) = R.I_m \sin(\omega t) + (\omega L) \cdot I_m \cos(\omega t)$$

$$= A \sin(\omega t) \cos(\theta) + A \sin(\theta) \cos(\omega t) = R.I_m \sin(\omega t) + (\omega L) \cdot I_m \cos(\omega t)$$

Aynı terim çarpanları karşılıklı eşitlenirse,

$$A \cos(\theta) = R.I_m \quad \frac{A \sin(\theta)}{A \cos(\theta)} = \frac{(\omega L) \cdot I_m}{R.I_m}$$

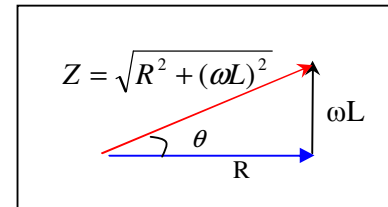
$$A \sin(\theta) = (\omega L) I_m \quad \text{tg}(\theta) = \frac{\omega L}{R}$$

A için,

$$A = \frac{R.I_m}{\cos(\theta)} = \frac{R.I_m}{\frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}} = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

veya

$$A = \frac{(\omega L) \cdot I_m}{\sin(\theta)} = \frac{(\omega L) \cdot I_m}{\frac{(\omega L)}{\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}} = I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}$$

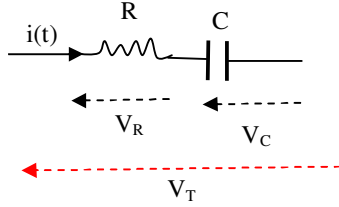


$$v_T = A \cdot \sin(\omega t + \theta) = \underbrace{I_m \cdot \sqrt{R^2 + (\omega L)^2}}_{V_m} \cdot \sin \left[\omega t + \tan^{-1} \left(\frac{\omega L}{R} \right) \right]$$

$$\text{empedans} = Z = \frac{V_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad R = 0 \text{ ise } \theta = 90 \text{ (endüktif)}, \quad (\omega L) = 0 \text{ ise } \theta = 0 \text{ (omik)}$$

Örnek:

Aşağıda seri bir RC devresinden $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega \cdot t)$ geçiyorsa uygulanmış toplam gerilimi v_T 'yi tek bir sin. Fonksiyonu şeklinde gösteriniz.



$$v_T = v_R + v_C = R \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) + \frac{1}{C} \int \underbrace{i(t)}_{I_m \cdot \sin(\omega t)} \cdot dt = R \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) - \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t)$$

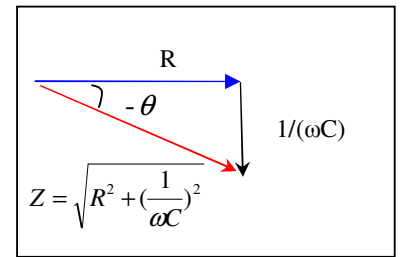
$$v_T = A \cdot \sin(\omega t + \theta) = R \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) - \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t)$$

$$= A \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\theta) + A \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\omega t) = R \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) - \frac{I_m}{\omega C} \cos(\omega t)$$

Aynı terim çarpanları karşılıklı eşitlenirse,

$$\begin{aligned} A \cdot \sin(\theta) &= -\frac{I_m}{\omega C} \\ A \cdot \cos(\theta) &= R \cdot I_m \end{aligned} \quad \frac{A \cdot \sin(\theta)}{A \cdot \cos(\theta)} = \tan(\theta) = \frac{-\frac{I_m}{\omega C}}{R \cdot I_m} = \frac{-\frac{1}{\omega C}}{R} = -\frac{1}{(\omega C)R}$$

$$A \text{ için, } A = \frac{-\frac{I_m}{\omega C}}{\sin(\theta)} = \frac{-\frac{I_m}{\omega C}}{-\frac{1}{\omega C}} = I_m \cdot \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} = V_m$$

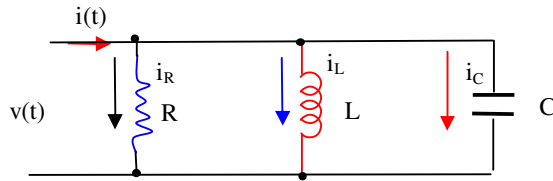


$$\begin{aligned}
 v_T &= A \cdot \sin(\omega t + \theta) = I_m \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot \sin\left[\omega t + \tan^{-1}\left(-\frac{1}{(\omega C)R}\right)\right] \\
 &= I_m \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \cdot \sin\left[\omega t - \tan^{-1}\left(\frac{1}{(\omega C)R}\right)\right]
 \end{aligned}$$

$$\text{empedans} = \frac{V_m}{I_m} = Z = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad R=0 \text{ ise } \theta = -90^\circ \text{ (kapasitif), } \frac{1}{(\omega C)} = 0 \text{ ise } \theta = 0^\circ \text{ (omik)}$$

Örnek

Aşağıdaki devrede $v(t) = V_m \sin(\omega t)$ ise $i(t)$ akım fonksiyonunu tek bir sin. Fonksiyonu olarak bulunuz.



$$\begin{aligned}
 i(t) &= i_R + i_L + i_C = \frac{v(t)}{R} + \frac{1}{L} \int v(t) \cdot dt + C \cdot \frac{dv(t)}{dt} \\
 &= \frac{V_m}{R} \sin(\omega t) - \frac{V_m}{\omega L} \cos(\omega t) + \omega C V_m \cos(\omega t) \\
 &= A \cdot \sin(\omega t + \theta) \text{ olsun}
 \end{aligned}$$

$$A \cdot \sin(\omega t) \cdot \cos(\theta) + A \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\omega t) = \frac{V_m}{R} \sin(\omega t) - \frac{V_m}{\omega L} \cos(\omega t) + \omega C V_m \cos(\omega t)$$

$$A \cdot \sin(\theta) = V_m \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)$$

$$A \cdot \cos(\theta) = \frac{V_m}{R} \quad \tan(\theta) = \frac{A \cdot \sin(\theta)}{A \cdot \cos(\theta)} = \frac{\left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)}{\frac{1}{R}}$$

$$\cos(\theta) = \frac{(1/R)}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

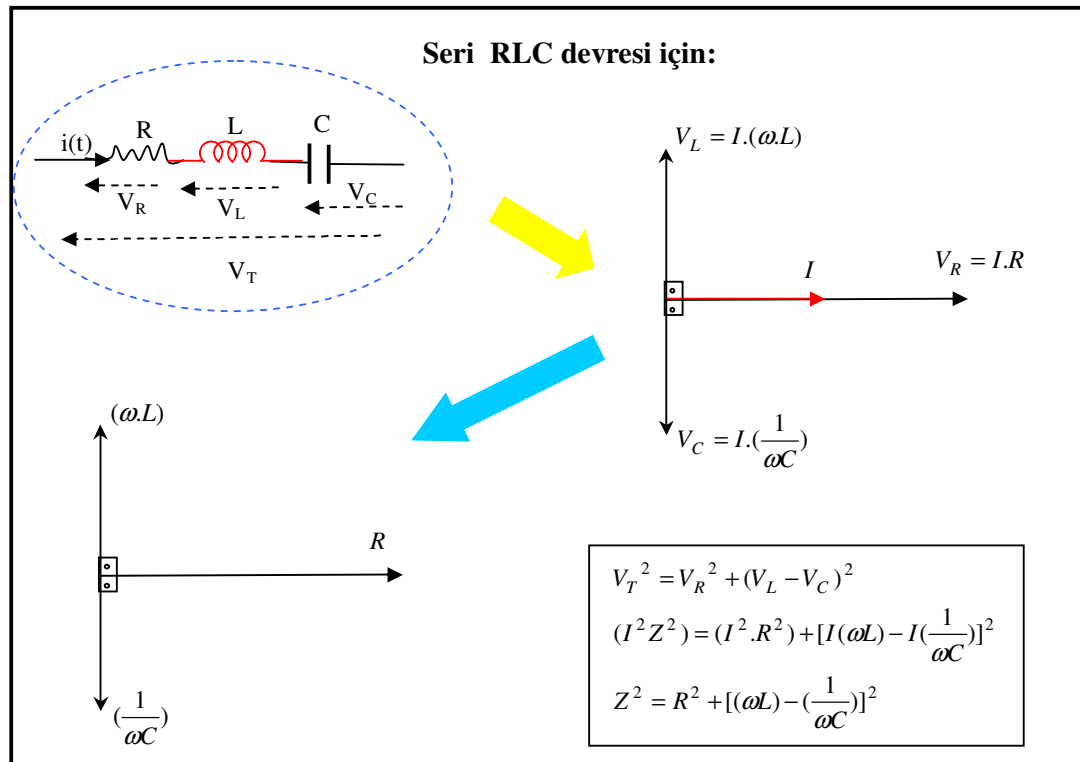
$$A = \frac{V_m}{R} \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} = \frac{V_m}{R} \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}{\left(\frac{1}{R}\right)} = V_m \cdot \underbrace{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}_{I_m}$$

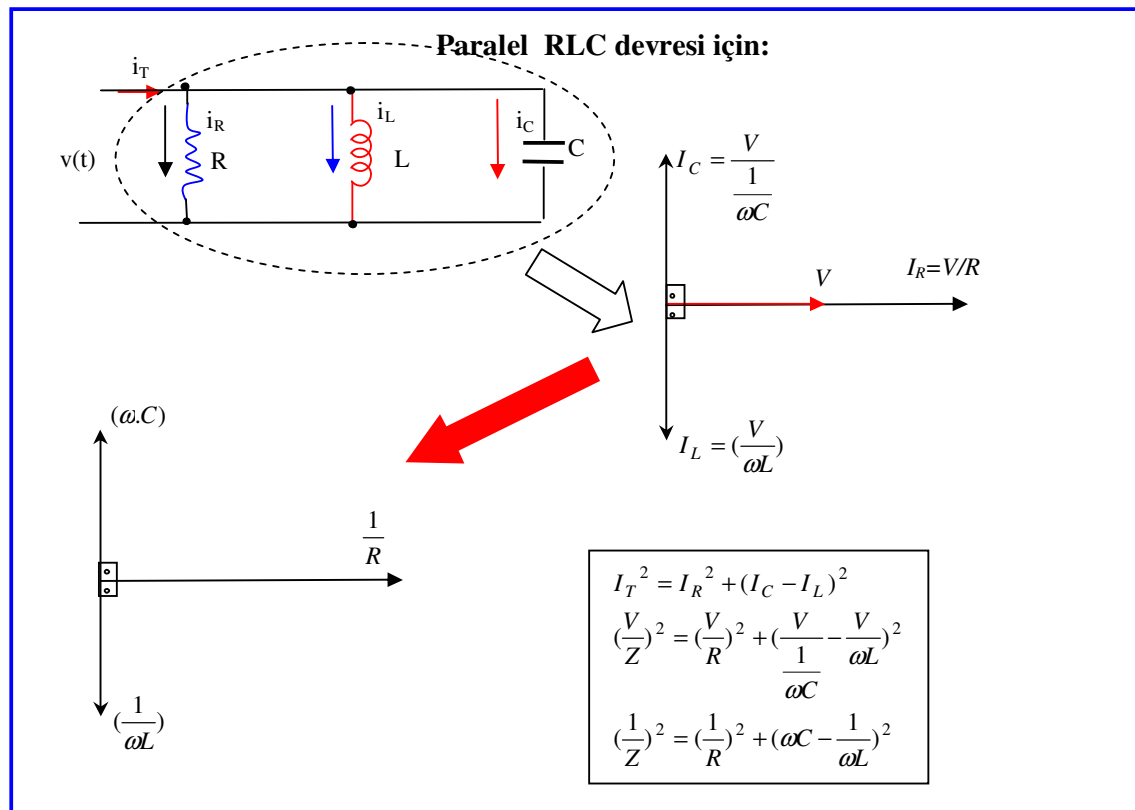
$$i(t) = V_m \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2} \cdot \sin\left[\omega t + \tan^{-1}\left((\omega C - \frac{1}{\omega L})R\right)\right]$$

$$\text{empedans} = Z = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right)^2}}$$

Böyle bir paralel devrede, $i_L > i_C$ ise yani $1/(\omega L) > \omega C$ ise açı negatif olup $i(t)$ gerilimden geridedir (endüktif karakter), tersi ise açı pozitif olup $i(t)$ gerilimden ileridedir (kapasitif karakter). Böylece akımın açısını ωL ve $1/(\omega C)$ 'nin terslerinin büyüklüğü, yani aynı gerilimli paralel kol akımlarının büyüklüğü belirler. $\omega L = 1/(\omega C)$ ise sistemin akımı ile gerilimi arasındaki açı sıfırdır (sistem omik karakter).

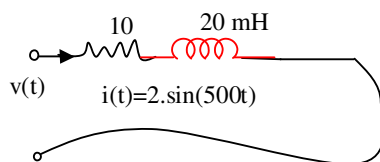
Seri ve Paralel RLC devrelerinde eşdeğer empedans





Örnek:

Şekildeki seri RL devresinde uygulanan gerilim fonksiyonu $v(t)$ ve açısını bulunuz.



$$\omega = 500 \text{ rad/s}, \quad I_m = 2$$

$$\omega.L = 500.(0.02) = 10 \quad Z = \sqrt{R^2 + (\omega.L)^2} = \sqrt{10^2 + 10^2} = 14.14 \text{ ohm}$$

$$\tan(\theta) = \frac{\omega L}{R} \text{ ise } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{10}{10}\right) = 45^\circ \quad V_m = Z I_m = 14.14(2) = 28.28 \text{ V.}$$

$$v(t) = V_m \cdot \sin(500t + \theta) = 28.28 \sin(500t + 45^\circ)$$

Örnek:

Seri bir RL devresinde $R=20$ ohm, $L=0.06$ H. Ve akım gerilimden 80° geridedir. $\omega = ?$

$$\text{tg}(\theta) = \frac{\omega.L}{R} = \text{tg}(80) = 5.67 \quad \text{ise}$$

$$\omega.L = (5.67).20 = 113.42 \text{ ohm}$$

$$\omega = \frac{\omega \cdot L}{L} = 113.42 / (0.06) = 1890.42 \text{ rad/s}$$

Örnek:

Seri bir RL devresinde, $L=0.02$ H., empedans 17.85 ohm ‘dur. Akım gerilimden 63.4° geride olduğuna göre ω ve R değerlerini bulunuz.

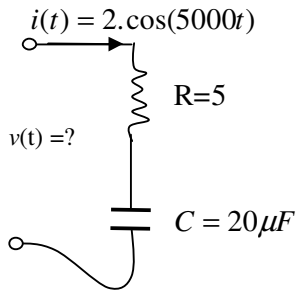
$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{\omega L}{R} = \operatorname{tg}(63.4) \cong 2 \quad R = \frac{\omega L}{\operatorname{tg}(\theta)} = \frac{\omega L}{2}$$

$$Z = \sqrt{R^2 + (\omega L)^2} \quad 17.85 = \sqrt{\left(\frac{\omega L}{2}\right)^2 + (\omega L)^2} = (\omega L) \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + 1}$$

$$(\omega L) = 16.08 \text{ ohm} , \quad R = \frac{\omega L}{2} = \frac{16.08}{2} = 8.04 \text{ ohm} \quad \text{ve} \quad \omega = 16.08 / 0.02 = 804 \text{ rad/s}$$

Örnek:

Şekildeki seri RC devresinde uygulanan $v(t)=?$



Sin. Gerilimli devrelerdeki gerilim akım arasındaki faz farkı durumları cos. lü devreler için de geçerlidir.

$$\omega = 5000, \quad I_m = 2 \text{ A.}$$

$$V_m = I_m \cdot Z = 2 \cdot \sqrt{5^2 + \left(\frac{1}{5000(20 \cdot 10^{-6})}\right)^2} = 22.36 \text{ V.}$$

$$\operatorname{tg}(\theta) = \frac{1/(\omega C)}{R} = \frac{1}{(5000)20 \cdot 10^{-6}} = 2 \quad \text{ise} \quad \theta = 63.43^\circ$$

$$v(t) = 22.36 \cos(5000t - \theta) = 22.36 \cos(5000t - 63.43^\circ)$$

Örnek:

ωL ve $1/(\omega C)$ ifadelerinin birimlerinin ohm olduğunu gösteriniz.

$$v = L \frac{di}{dt}$$

$$volt = (Henri) \frac{amper}{s}$$

$$\omega L = \frac{1}{\underbrace{s}_{\omega}} \cdot \left(\frac{volt \cdot s}{amper} \right) = \frac{volt}{amper} = ohm$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{cloumb}{s} = amper$$

$$C = \frac{q}{v} = farad = \frac{cloumb}{volt} = \frac{(amper) \cdot s}{volt}$$

$$\frac{1}{\omega C} = \left(\underbrace{\frac{1}{s}}_{1/\omega} \right) \cdot \left(\frac{1}{(amper) \cdot s} \right) = \frac{volt}{amper} = ohm$$

2. Karmaşık Sayılarla Analiz

Gerçek (Reel) sayılar: Gerçek sayılar $-\infty$ ile ∞ arasında x eksenini boyunca uzanır, ve pozitif sayıların karekökleri de bu doğru üzerindedir.

Sanal Sayı: Negatif gerçek sayıların kareköklerini ifade eder.

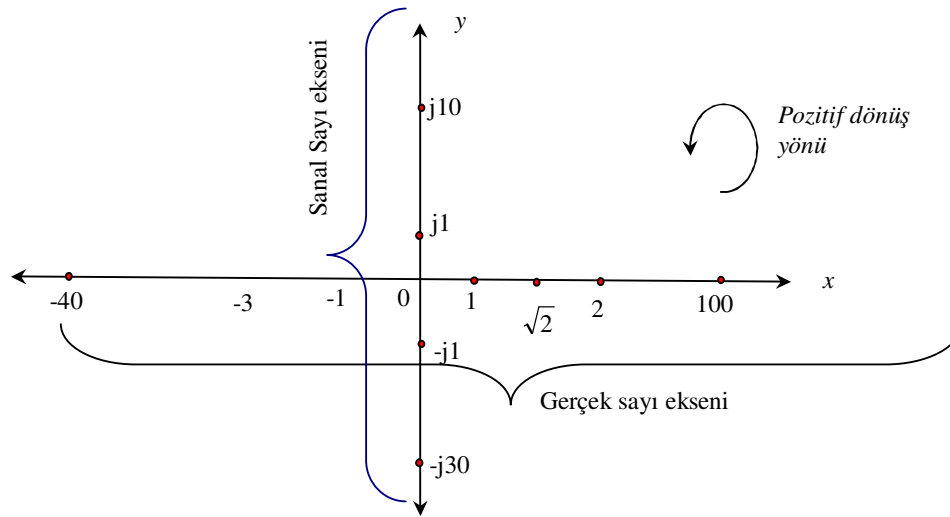
$\sqrt{-1}$, $\sqrt{-2}$ ve $\sqrt{-20}$ gibi

$$\sqrt{-1} = j$$

$$\sqrt{-2} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{-1} = j\sqrt{2}$$

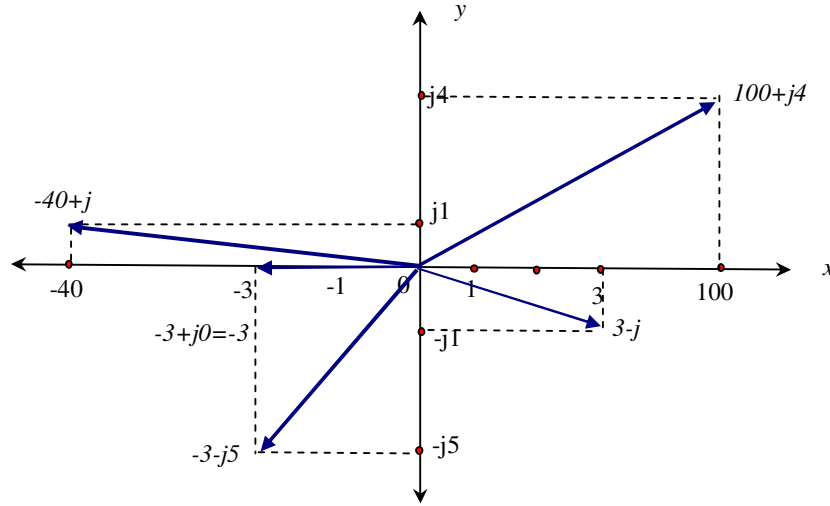
$$j^2 = -1, \quad j^3 = j \cdot j^2 = (-1) \cdot j = -j \quad j^4 = j^2 \cdot j^2 = (-1) \cdot (-1) = 1$$

Sanal sayılar gerçek sayı doğrusunda gösterilmez. Bunlar için ayrı bir sayı doğrusu y ekseninde ifade edilir. Böylece j terimi çarpan olarak girdiği gerçek sayıyı pozitif dönüş yönüne göre 90° döndürür.



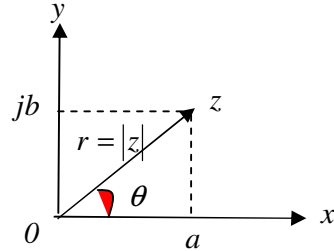
Karmaşık Sayı: Gerçek ve sanal sayıları kapsayan bir sayı gurubu olarak *karmaşık sayılar* ifade edilir. Bu sayılar bir vektör olup koordinatlarını gerçek ve sanal terimler oluştur. Bir karmaşık sayının adresi ve ifadesi aşağıdaki gibidir.

$$Z = (\text{reel}, \text{sanal}) = (a, jb) = a + jb$$



Gösterim Şekilleri:

$$\begin{aligned} |z| &= r = \sqrt{a^2 + b^2} \\ a &= r \cdot \cos \theta \\ b &= r \cdot \sin \theta \\ \theta &= \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \\ z &= a + jb = r \cdot (\cos \theta + j \sin \theta) \end{aligned}$$



Euler gösterimi

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

dik koordinat şekil $\rightarrow z = a + jb$

kutupsal şekil $\rightarrow z = r \angle \theta$

üstel şekil $\rightarrow z = r \cdot e^{j\theta}$

trigonometrik şekil $\rightarrow z = r \cdot (\cos \theta + j \sin \theta)$

Bu gösterim şekillerinin hepsi aynı anlamı verir.

Buradaki θ açısı karmaşık sayı vektörünün gerçekte ve sanal terimlerinin belirlediği x eksenine ile yaptığı mutlak açıdır. Z karmaşık sayısının gerçekte açısı pozitif x eksenine ile yaptığı açıdır. Dik koordinat şekilden kutupsala veya üstele dönüşümde, karmaşık sayılar birbirinden farklı olmasına rağmen $\tan^{-1}(b/a)$ değeri b ve a nın negatif veya pozitif değerlerine göre aynı açı değerleri verebilir. Açının gerçekte değeri, gerçekte ve sanal terimlerin konumlarının belirlediği x - y koordinat ekseninden belirlenebilir.

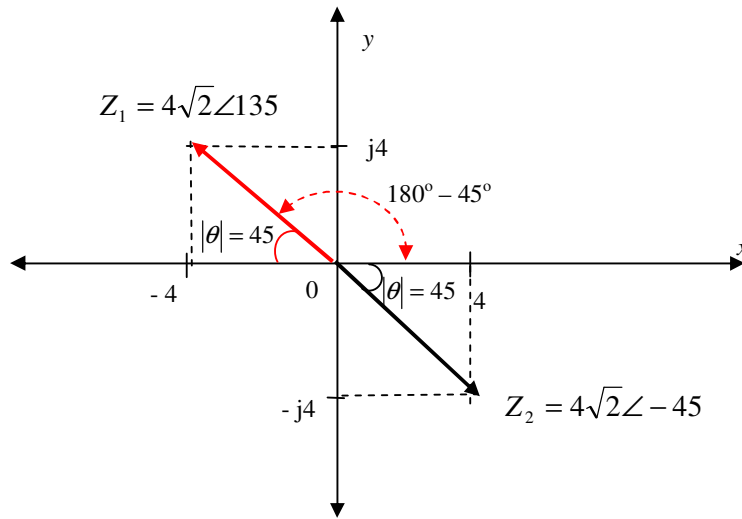
Örnek:

$$Z_1 = -4 + j4$$

$$Z_2 = 4 - j4$$

$$|\theta| = \tan^{-1}\left(\frac{4}{-4}\right) = 45$$

$$|\theta| = \tan^{-1}\left(\frac{-4}{4}\right) = 45$$

**Karmaşık Sayının Eşleniği:**

Karmaşık sayının eşleniğinde, sanal terimin işaretinin tersi alınır. Gerçekte terim işareti korunur. Kutupsal gösterimde ise açının ters işareti alınır.

Eşlenik $\rightarrow Z^*$

$$z = a + jb$$

$$z = r \angle \theta$$

$$z = r.e^{j\theta}$$

$$z^* = a - jb$$

$$z^* = r \angle -\theta$$

$$z^* = r.e^{-j\theta}$$

$$Z = j4 \rightarrow Z^* = -j4$$

$$Z = 2 \angle 50 \rightarrow Z^* = 2 \angle -50$$

gibi.

Karmaşık Sayıların Eşitliği:

Gerçek ve sanal terimler karşılıklı olarak birbirine eşittir.

$$z_1 = a + jb$$

$$z_2 = c + jd$$

$$z_1 = z_2 \rightarrow a = c, \quad b = d$$

Toplama İşlemi:

Karşılıklı gerçek ve sanal terimler birleriyle toplanır. Kutupsal gösterim gibi diğer şekillerde ise karmaşık sayılar dik koordinat şekline dönüştürülür ve işlem yapılır.

$$z_1 = 5 - j2, \quad z_2 = -3 - j8$$

$$z_1 + z_2 = (5 - j2) + (-3 - j8) = (5 - 3) + j(-2 - 8) = 2 - j10$$

$$z_1 - z_2 = 5 - j2 - (-3 - j8) = 8 + j6$$

Çarpma İşlemi:

Dik koordinat şekillerinde her bir terimin birbiriyle çarpımın toplamaları ile ifade edilir. Kutupsal ve üstel şekillerde ise büyüklükler çarpılır açılar toplanır.

$$\begin{aligned} z_1 &= a + jb, \\ z_2 &= c + jd \end{aligned} \quad z_1 \cdot z_2 = (a + jb) \cdot (c + jd) = a \cdot (c + jd) + jb(c + jd)$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = r_1 \cdot e^{j\theta_1} \cdot r_2 \cdot e^{j\theta_2} = (r_1 \cdot r_2) e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$$

$$Z_1 \cdot Z_2 = (r_1 \angle \theta_1) \cdot (r_2 \angle \theta_2) = (r_1 \cdot r_2) \angle (\theta_1 + \theta_2)$$

Bölme İşlemi:

Dik koordinatlı şekillerde bölme işlemi için paydanın eşleniği, pay ve payda ile çarpılır ve işlem yapılarak sonuç bulunur. Kutupsal gösterimlerde ise büyüklükler bölünür, paydadaki sayının açısı -1 ile çarpılarak paydaki açı ile toplanır.

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{(a + jb)}{(c + jd)} = \frac{(a + jb) \cdot (c - jd)}{(c + jd) \cdot (c - jd)} = \frac{(a + jb) \cdot (c - jd)}{\underbrace{c^2 + d^2}_{\text{gerçek sayı}}}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 \cdot e^{j\theta_1}}{r_2 \cdot e^{j\theta_2}} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cdot e^{j(\theta_1 - \theta_2)} \quad \frac{1}{e^{j\theta}} = e^{-j\theta}$$

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 \angle \theta_1}{r_2 \angle \theta_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right) \cdot \angle \theta_1 - \theta_2$$

Not:

Toplama işlemlerinde dik koordinat şekil, bölme ve çarpma işlemlerinde sayıların kutupsal veya üstel şekiller olması işlem basitliği vermektedir.

Karmaşık Sayıların Kökü:

$$\left. \begin{aligned} z &= r.e^{j\theta} = r.e^{j(\theta+2\pi n)} & \sqrt[k]{z} &= r^{(1/k)} .e^{j(\theta+2\pi n)/k} \\ z &= r\angle\theta = r\angle\theta + 360.n & \sqrt[k]{z} &= r^{(1/k)} \angle(\theta + 360.n)/k \end{aligned} \right\} n = 0,1,2$$

k tane farklı kök için $n=0,1,2,3,\dots,(k-1)$ kadar kök vardır.

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z} &= 8^{1/3} \angle(60 + 360.n)/3 = 2\angle(60 + 360.n)/3 \\ z = 8\angle 60 \quad \text{ için,} \quad & \begin{aligned} n = 0 &\rightarrow 2\angle 20 \\ n = 1 &\rightarrow 2\angle 140 \\ n = 2 &\rightarrow 2\angle 260 \end{aligned} \end{aligned} \quad \text{'dir.}$$

$z = 1 + j0 = 1\angle 0$ 'in beş beşinci kökü için,

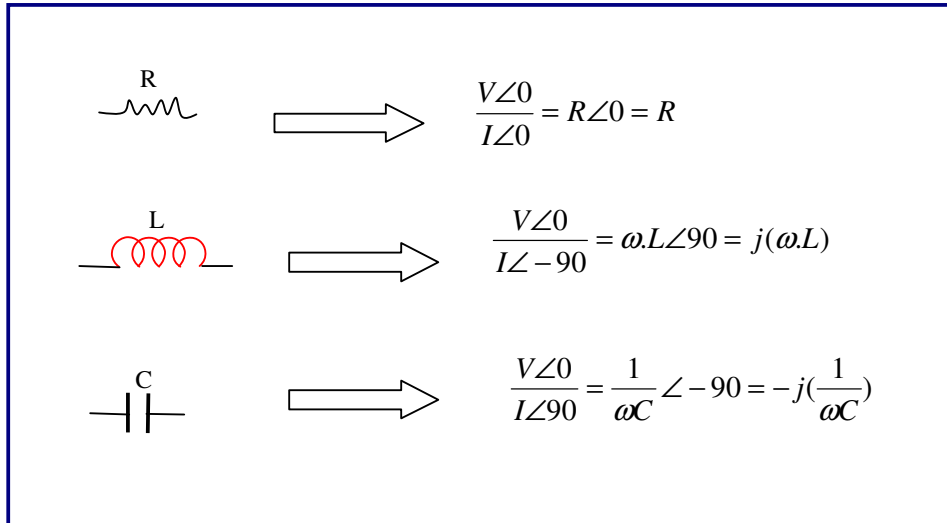
$$\begin{aligned} \sqrt[5]{z} &= 1^{(1/5)} .e^{j(2\pi n)/5} \\ n = 0 &\rightarrow 1.e^{j0} = 1\angle 0 \\ n = 1 &\rightarrow 1.e^{j2\pi/5} = 1\angle 72 \\ n = 2 &\rightarrow 1.e^{j4\pi/5} = 1\angle 144 \\ n = 3 &\rightarrow 1.e^{j6\pi/5} = 1\angle 216 \\ n = 4 &\rightarrow 1.e^{j8\pi/5} = 1\angle 288 \end{aligned}$$

Karmaşık Sayıların Logaritması:

$$z = r.e^{j(\theta+2\pi n)} \quad \text{ise,}$$

$\ln(z) = \ln(r) + \ln(e^{j(\theta+2\pi n)}) = \ln(r) + j(\theta + 2\pi n)$ 'dir. Sonuç n değerlerine bağlıdır. $n=0$ 'da esas değer elde edilir. Genellikle bu değer kullanılır.

Empedansların Karmaşık Sayılarla İfadesi:



3. AC Seri ve Paralel Devrelerde Analiz

Sinüs gerilimli alternatif akım (AC) devrelerinde, L endüktansı için empedans jX_L ile C kapasitörü için empedans $-jX_C$ ile ifade edilir. Bunların büyüklük değerleri aşağıdaki ifadelerle hesaplanır.

$$X_L = \omega L$$

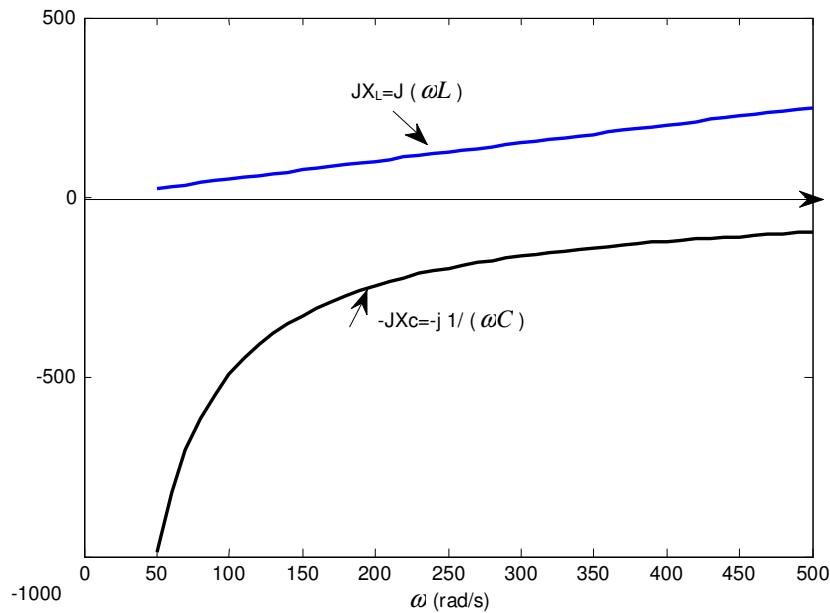
$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

$$\text{ve } \omega = 2\pi.f$$

Örneğin $L=400 \text{ mH}$ ve $C = 25\mu\text{F}$ için ω 'nın farklı değerlerine göre X_L ve X_C değerleri aşağıda tabloda verilmektedir.

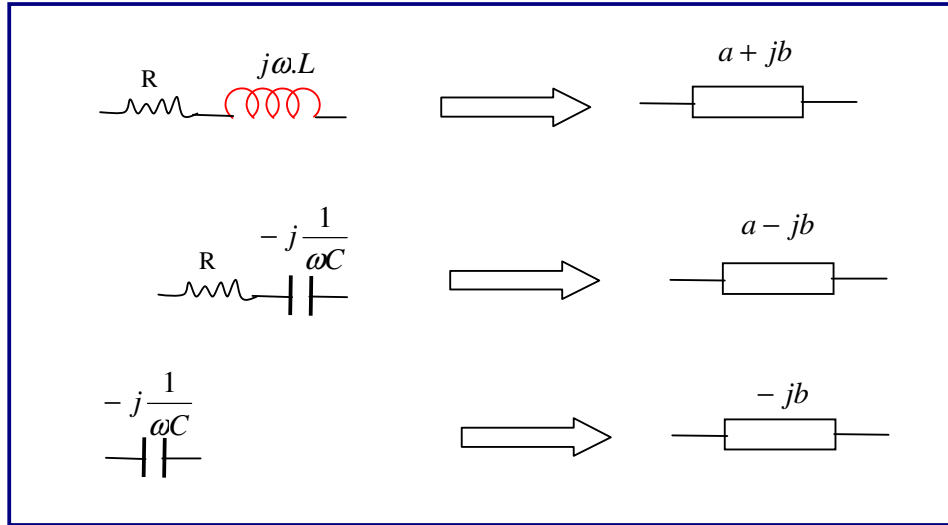
$\omega(\text{rad/s})$	$X_L=\omega L$	$X_C=1/(\omega C)$
100	40	400
250	100	160
500	200	80
700	280	57.1429
1000	400	40

Genel bir yaklaşımla X_L ile ω doğrusal olarak artarken, X_C ise ω ile doğrusal olmayan bir şekilde üstel azalmaktadır. İlgili prensip grafikler aşağıda verilmektedir.



Empedansların devrelerde gösterimi :

Empedanslar devre çizimlerinde, dikdörtgen şeklinde bileşke empedanslar veya tek empedanslar halinde karmaşık sayılarla birlikte gösterilir.

**Örnek:**

Empedansı $40\angle 30^\circ$ ohm olan seri bir RL devresinde $L=0.02$ H.'dir. $R=?$ ve $f=?$

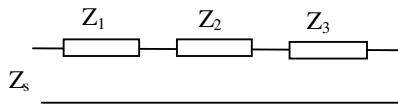
$$R = Z \cdot \cos(\theta) = 40 \cos(30) = 34.64$$

$$X_L = Z \cdot \sin(\theta) = 40 \cdot \sin(30) = 20$$

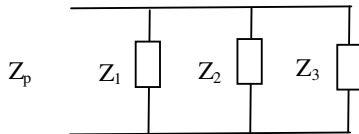
$$Z\angle 30^\circ = R + jX_L$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{\omega L}{L} = \frac{X_L}{L} = \frac{20}{0.02} = 1000 \text{ rad/s}$$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1000}{2\pi} = 159.23 \text{ Hz.}$$

Seri ve Paralel eşdeğer empedanslar

$$Z_s = Z_1 + Z_2 + Z_3 + \dots$$

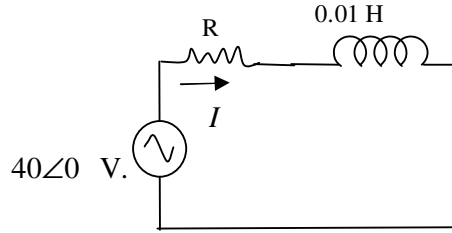


$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} + \dots$$

Z karmaşık sayı işlem kuralları çerçevesinde analiz yapılır..!

Örnek:

Şekildeki devrede akım $I = 2\angle -50^\circ$ A.'dir. Bu devreye seri olarak $100\mu F$ 'lık kondansatör eklendiğinde, eşdeğer empedansı ve yeni çekilen akımı bulunuz.

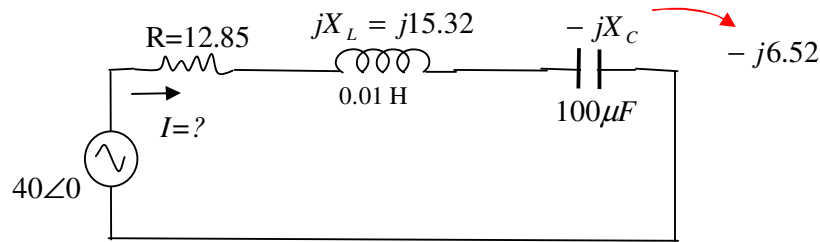
1.durum:

$$Z = \frac{40\angle 0}{2\angle -50} = 20\angle 50^\circ \text{ ohm}$$

$$R = Z \cdot \cos 50 = 20 \cdot \cos(50) = 12.85$$

$$X_L = Z \cdot \sin 50 = 20 \cdot \sin(50) = 15.32$$

$$\omega = \frac{X_L}{L} = \frac{15.32}{0.01} = 1532.08 \text{ rad/s}$$

2.durum

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{(1532.08) \cdot (100)10^{-6}} = 6.52$$

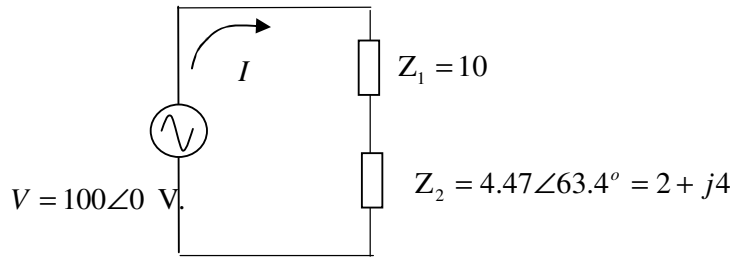
$$Z_{es} = R + jX_L - jX_C$$

$$= 12.85 + j(15.32 - 6.52) = 12.85 + j8.79 = 15.56\angle 34.37^\circ$$

$$I = \frac{40\angle 0}{15.56\angle 34.37} = 2.62\angle -34.37^\circ \text{ A.}$$

Örnek:

Şekildeki her empedans üzerindeki gerilimi, çekilen akımı ve vektör (fazör) diyagramını çiziniz.



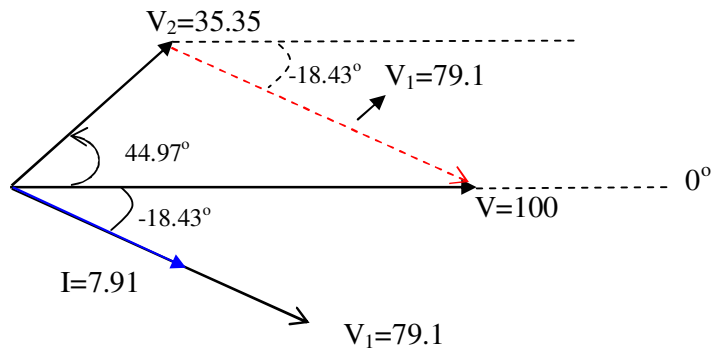
$$Z = Z_1 + Z_2 = 10 + (2 + j4) = 12 + j4 = 12.64\angle 18.43^\circ$$

$$I = \frac{100\angle 0}{12.64\angle 18.43} = 7.91\angle -18.43 \text{ A.}$$

$$V_1 = Z_1 \cdot I = (10\angle 0) \cdot (7.91\angle -18.43) = 79.1\angle -18.43 \text{ V.}$$

$$V_2 = Z_2 \cdot I = (4.47\angle 63.4) \cdot (7.91\angle -18.43) = 35.35\angle 44.97 \text{ V.}$$

Fazör diyagramı:



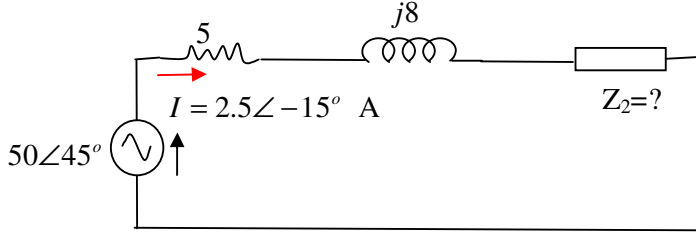
Sağlama:

$$V = V_1 + V_2 = (75.04 - j25) + (24.76 + j24.73)$$

$$100 \cong 99.8$$

Örnek:

Şekildeki devrede $Z_2=?$



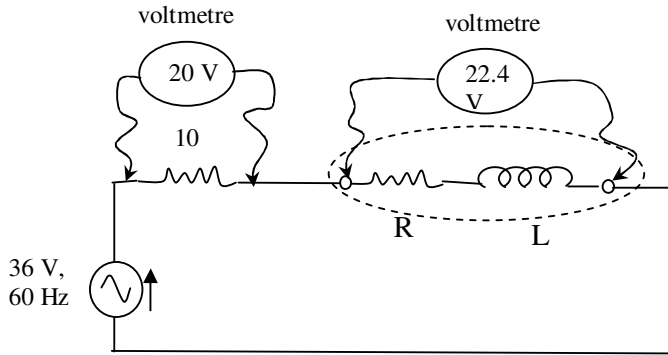
$$Z_{es} = \frac{50\angle 45^\circ}{2.5\angle -15^\circ} = 20\angle 60^\circ$$

$$Z_{es} = 5 + j8 + Z_2$$

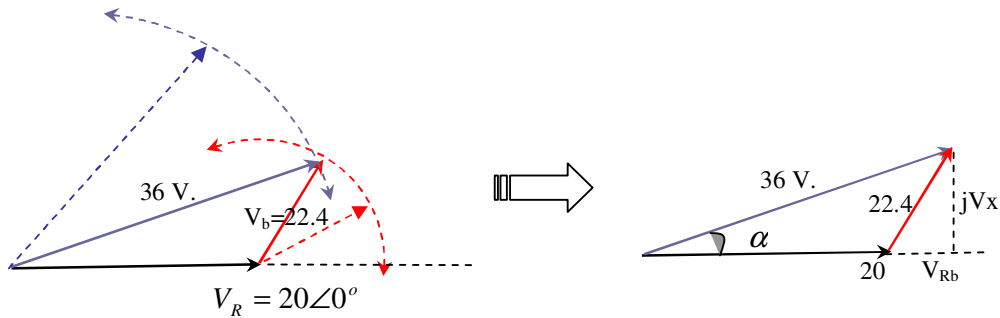
$$\begin{aligned} Z_2 &= (20\angle 60^\circ) - (5 + j8) \\ &= 10 + j17.32 - 5 - j8 \\ &= 5 + j9.32 \end{aligned}$$

Örnek:

Şekildeki voltmetre ölçüm değerlerine göre bobine ait R ve L değerlerini bulunuz.



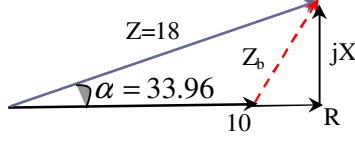
$I = 20/10 = 2\text{ A}$. ve bu $10\ \Omega$ 'daki gerilimle aynı fazdadır. Bunlar fazör gösterimde referans alındığında $I = 2\angle 0^\circ\text{ A}$. yazılabilir.



$$\begin{aligned} 36^2 + 20^2 &= 22.4^2 + 2 \cdot (36) \cdot (20) \cdot \cos \alpha \\ \cos \alpha &= 0.82 \quad \alpha = 33.96^\circ \end{aligned}$$

$$Z = \frac{36\angle \theta}{2\angle 0} = 18\angle \theta \quad \theta = \alpha$$

Sistem seri devre olduğundan, empedans eşitliği ve fazör diyagramı aşağıdadır.



$$Z = 10 + Z_b = 10 + (R + jX)$$

$$\cos \alpha = \frac{(10 + R)}{Z} = \frac{10 + R}{18}$$

$$R = (18 \cdot \cos(33.96)) - 10 = 4.92$$

$$\sin \alpha = \frac{X}{Z} = \frac{X}{18}$$

$$X = 18 \cdot \sin(33.96) = 9.9$$

$$L = \frac{X}{2\pi f} = \frac{9.9}{2\pi(60)} = 0.026 \text{ H} = 26 \text{ mH}$$

veya

$$V_T = 36 \angle 33.96^\circ = 29.85 + j20.11$$

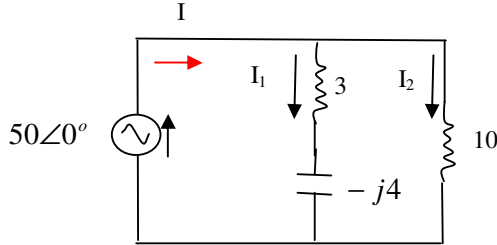
$$V_T = \underbrace{20 + V_{Rb}}_{29.85} + j \underbrace{V_X}_{20.11}$$

$$V_{Rb} = 29.85 - 20 = 9.85$$

$$R = \frac{V_{Rb}}{I} = \frac{9.85}{2} = 4.92$$

Örnek.

Şekildeki devrede I_1 ve I_2 akımlarını ve devre akımını bulunuz.



$$I_1 = \frac{50 \angle 0}{3 - j4} = \frac{50 \angle 0}{5 \angle -53.13} = 10 \angle 53.13 = 6 + j8 \text{ A.}$$

$$I_2 = \frac{50 \angle 0}{10 \angle 0} = 5 \angle 0 = 5 \text{ A.}$$

$$I = I_1 + I_2 = 6 + j8 + 5 = 11 + j8 = 13.6 \angle 36^\circ$$

İki paralel koldaki akım ifadeleri ile kontrol :

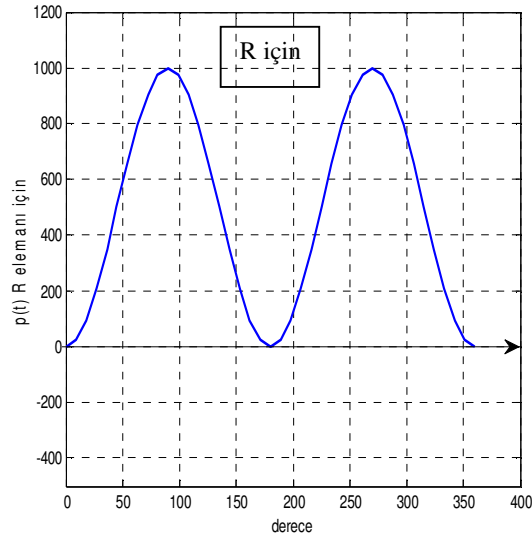
$$I_1 = I \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = (13.6 \angle 36) \cdot \frac{10 \angle 0}{10 + 3 - j4} = \frac{136 \angle 36}{13.6 \angle -17.1} = 10 \angle 53.1 \text{ A}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{Z_1}{Z_2 + Z_1} = (13.6 \angle 36) \cdot \frac{3 - j4}{10 + 3 - j4} = (13.6 \angle 36) \cdot \frac{5 \angle -53.1}{13.6 \angle -17.1} \cong 5 \angle 0 \text{ A.}$$

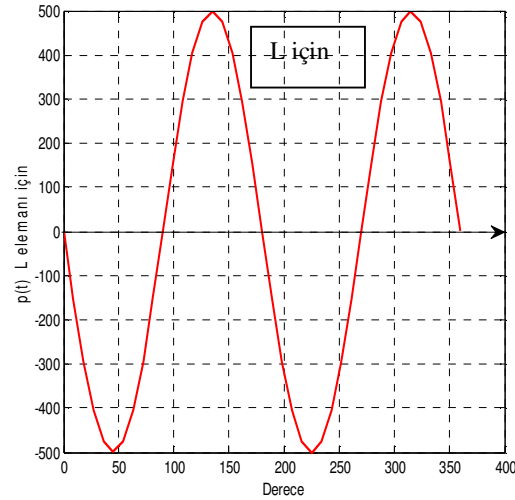
4. AC ‘de Güç ve güç Katsayısı

AC’de R, L ve C elemanlarının güç değişimleri aşağıdadır.

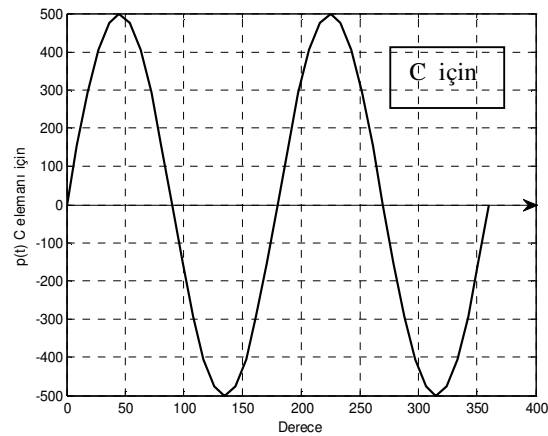
$$\begin{aligned}
 v &= V_m \cdot \sin(\omega t) \\
 i &= I_m \cdot \sin(\omega t) \\
 p(t) &= v \cdot i = V_m \cdot I_m \cdot \underbrace{\sin^2(\omega t)}_{\frac{1}{2}(1-\cos 2\omega t)} \\
 p(t) &= \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m - \underbrace{\frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cdot \cos(2\omega t)}_{P_{ort}=0} \\
 P_{ort} &= P = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \\
 &= \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot V) \cdot (\sqrt{2} \cdot I) = V \cdot I
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 v &= V_m \cdot \sin(\omega t) \\
 i &= I_m \cdot \sin(\omega t - \frac{\pi}{2}) \\
 p(t) &= v \cdot i = V_m \cdot I_m \sin(\omega t) \cdot \underbrace{\sin(\omega t - \frac{\pi}{2})}_{-\cos(\omega t)} \\
 2 \sin x \cdot \cos x &= \sin(2x) \\
 p(t) &= -\frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cdot \sin(2\omega t) \\
 P_{ort} &= P = 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 v &= V_m \cdot \sin(\omega t) \\
 i &= I_m \cdot \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\
 p(t) &= v \cdot i = V_m \cdot I_m \sin(\omega t) \cdot \underbrace{\sin(\omega t + \frac{\pi}{2})}_{\cos(\omega t)} \\
 2 \sin x \cdot \cos x &= \sin(2x) \\
 p(t) &= \frac{1}{2} V_m \cdot I_m \cdot \sin(2\omega t) \\
 P_{ort} &= P = 0
 \end{aligned}$$



p(t) pozitifse kaynaktan devreye enerji aktarımı vardır.....

p(t) negatif ise devreden kaynağa enerji aktarımı vardır.....

Tipik Bir Devredeki Ortalama Güç (P) :

Bir devrede gerilim $v = V_m \cdot \sin(\omega t)$, akım ise $i = I_m \cdot \sin(\omega t + \theta)$ olsun. θ açısı negatif veya pozitif olabilir (ileri veya geri fazda). $p(t)$ güç ifadesi ve ortalama güç (P) aşağıda ifade edilmektedir.

Hatırlatma:

$$\sin a \cdot \sin b = \frac{1}{2} [\cos(a - b) - \cos(a + b)]$$

Güç ifadesi ise:

$$\begin{aligned} p(t) &= v \cdot i = V_m \cdot I_m \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega t + \theta) \\ &= V_m \cdot I_m \cdot \frac{1}{2} [\cos(\omega t - \omega t - \theta) - \cos(\omega t + \omega t + \theta)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m [\cos \theta - \cos(2\omega t + \theta)] \\ &= \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot \cos \theta - \underbrace{\frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot \cos(2\omega t + \theta)}_{\text{periyodik ve } P_{\text{ort}}=0} \end{aligned}$$

$$P_{\text{ort}} = P = \frac{1}{2} \cdot V_m \cdot I_m \cdot \cos \theta = \frac{1}{2} \cdot (\sqrt{2} \cdot V) \cdot (\sqrt{2} \cdot I) \cdot \cos \theta$$

$$P = V \cdot I \cdot \cos \theta$$

Burada,

$P = AC$ 'deki ortalama güçtür. AC sistemlerinde çoğunlukla *aktif güç* adını almaktadır. Birimi Watt (W.)'dir. Yüksek güçlerde sözü geçen kilowatt için $1 \text{ kW} = 1000 \text{ W}$. 'dır.

θ = Devre gerilimi ile devre akımı arasındaki fark açısı.

$\cos \theta$ = Güç katsayısı. Akım gerilimden geri ise *geri güç katsayılı devre*, ileri ise *ileri güç katsayılı devre* adını alır. Değeri 0 ile 1 aralığındadır.

Görünür Güç (S) :

Sisteme verilen güçtür.

$$S = V \cdot I \quad (\text{VA})$$

$$1 \text{ kVA} = 1000 \text{ VA}$$

Reaktif Güç (Q):

L ve C elemanlarında, sisteme verilen S gücünün aktif güç dışında harcanan güç bileşenidir.

$$Q = V \cdot I \cdot \sin \theta \quad (\text{Volt. Amper. Reaktif}) = (\text{VAR})$$

Güç Üçgeni:

Yukarıdaki tanımlamalardan görüleceği gibi, görünür güç, aktif güç ve reaktif güçler fazör bir güç üçgeni oluştururlar. Bu karmaşık güç üçgeni olarak ifade edilir.

$$S = P \pm jQ$$

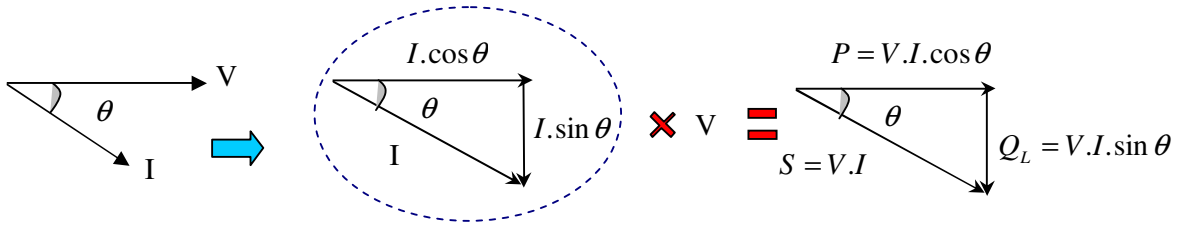
$$S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

Ohmik yüklerde:

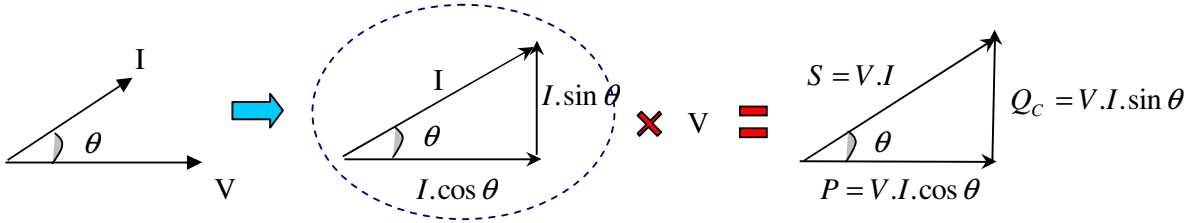
Saf ohmik yükler R elemanlarından oluşur. Akımla gerilim aynı fazdadır. Ohmik yüklerde sadece aktif güç P harcanır. Reaktif güç sıfırdır ($Q=0$). Aktif güç değeri S görünür güce eşittir ($P=S$).

Endüktif yüklü devrelerde:

Akım gerilimden geri fazda olup, geri güç katsayılı devreler olarak ifade edilir.

Kapasitif yüklü devrelerde:

Akım gerilimden ileri fazda olup, ileri güç katsayılı devreler olarak ifade edilir.



S görünür gücü $V\angle\theta_1$ ve $I\angle\theta_2$ değerlerine göre hesaplanırken, çarpım sonucu $S\angle\theta$ 'daki θ açısı V ile I arasındaki fark açı olmalıdır ($\theta = \theta_1 - \theta_2$). Oysa kutupsal karmaşık sayı çarpımında açılar toplanması gerektiğinden bu sonuç açısı fark açısı vermeyecektir. Bu nedenle işlem sonu açısının fark açısıyla anlamsal uyumu için I akımının işleminde eşleniği alınır. Yani,

$$S = V\angle\theta_1 . I^* = (V\angle\theta_1).(I\angle -\theta_2) = V.I\angle\theta_1 - \theta_2 = V.I\angle\theta = S\angle\theta$$

$S = V.I^*$ işleminin gerçek terimi P aktif gücü, sanal terimi ise Q reaktif gücü verir.

Aynı zamanda güç açısı θ , devre eşdeğer empedansının açısıdır. Bunun ifadesi:

$$Z = \frac{V\angle\theta_1}{I\angle\theta_2} = \frac{V}{I}\angle\theta_1 - \theta_2 = Z\angle\theta$$

AC’de genel anlamda güç ifadelerinin büyüklikleri aşağıda şekillerle hesaplanır.

$$\text{Ortalama güç (Aktif güç)} \rightarrow P = V.I.\cos\theta = I^2.R = \frac{V_R^2}{R} = V.I^* \text{ (gerçek terim)}$$

$$\text{Reaktif güç} \rightarrow Q = V.I.\sin\theta = I^2.X = \frac{V_X^2}{X} = V.I^* \text{ (sanal terim)}$$

$$\text{Görünür Güç} \rightarrow S = V.I^* = I^2.Z = \frac{V^2}{Z}$$

R, L ve C elemanlarından oluşan herhangi bir devrede, P güçleri R elemanları üzerinde, Q güçleri L ve C elemanları üzerinde harcanır. Her elemanın bireysel aktif veya reaktif güçleri hesaplandıktan sonra, sistem güçleri için aynı tipteki güçler kendi aralarında cebirsel olarak toplanabilir. Reaktif güçler için L’lerde harcanan güçler C’lerde harcanan güçlerden çıkarılarak j ‘li sanal terim ile ifadelendirilir. Yani,

$$P = I_1^2.R_1 + I_2^2.R_2 + \dots + I_n^2.R_n = P_1 + P_2 + \dots P_n$$

$$jQ = j[(Q_{L1} + Q_{L2} + \dots Q_{Ln}) - (Q_{C1} + Q_{C2} + \dots Q_{Cm})]$$

Örnek:

Bir devrenin eşdeğer empedansı $Z = 3 + j4$ ohm, $V = 100\angle 30^\circ$ ‘dir. Güç üçgeninin bileşenlerini bulunuz.

$$I = V / Z = (100\angle 30^\circ) / (5\angle 53.1^\circ) = 20\angle -23.1^\circ \text{ A.}$$

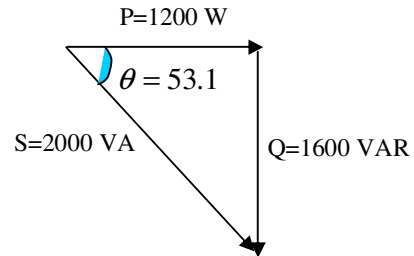
1.yaklaşım:

$$P = I^2.R = 20^2.3 = 1200 \text{ W.}$$

$$Q = I^2.X = 20^2.4 = 1600 \text{ VAR geride}$$

$$S = I^2.Z = 20^2.5 = 2000 \text{ VA}$$

$$\cos\theta = \cos(30 - (-23.1)) = \cos 53.1 = 0.6 \text{ geride}$$



2.yaklaşım:

$$S = V.I = (100).(20) = 2000 \text{ VA}$$

$$P = V.I.\cos\theta = (100).(20).\cos 53.1 = 1200 \text{ W.}$$

$$Q = V.I.\sin\theta = (100).(20).\sin 53.1 = 1600 \text{ VAR}$$

$$\cos\theta = \frac{P}{S} = \frac{1200}{2000} = 0.6 \text{ geri}$$

3.yaklaşım:

$$S = V.I^* = (100\angle 30).(20\angle 23.1) = 2000\angle 53.1 = P + jQ$$

$$P = S.\cos 53.1 = 1200 \text{ W.}$$

$$Q = S.\sin 53.1 = 1600 \text{ VAR geri}$$

4.yaklaşım:

$$V_R = I.R = (20\angle -23.1).(3) = 60\angle -23.1$$

$$V_X = I.X = (20\angle -23.1).\underbrace{(4\angle 90)}_{j4} = 80\angle 66.9$$

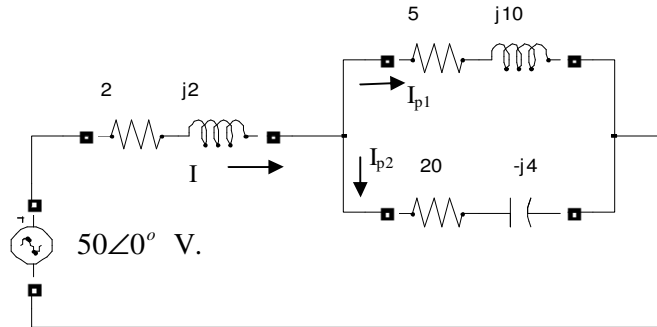
$$P = \frac{V_R^2}{R} = \frac{60^2}{3} = 1200 \text{ W.}$$

$$Q = \frac{V_X^2}{X} = \frac{80^2}{4} = 1600 \text{ VAR}$$

$$S = \frac{V^2}{Z} = \frac{100^2}{5} = 2000 \text{ VA}$$

Örnek:

Devrenin güç üçgenini bulunuz.



$$Z_p = \frac{(5 + j10).(20 - j4)}{5 + j10 + 20 - j4} = \frac{(11.18\angle 63.43).(20.39\angle -11.30)}{25.7\angle 13.49} = (8.87\angle 38.64) = 6.92 + j5.53$$

$$Z = Z_p + (2 + j2) = 8.92 + j7.53 = 11.67\angle 40.17^\circ$$

$$I = \frac{50\angle 0}{11.67\angle 40.17} = 4.28\angle -40.17^\circ \text{ A.}$$

$$V_p = I.Z_p = (4.28\angle -40.17)(8.87\angle 38.64) = 37.96\angle -1.53^\circ \text{ V.}$$

$$I_{p1} = \frac{V_p}{5 + j10} = \frac{37.96\angle -1.53^\circ}{11.18\angle 63.43} = 3.39\angle -64.96^\circ \text{ A.}$$

$$I_{p2} = \frac{V_p}{20 - j4} = \frac{37.96\angle -1.53^\circ}{20.39\angle -11.30} = 1.86\angle 9.77^\circ \text{ A.}$$

$$S = V.I^* = (50\angle 0^\circ)(4.28\angle 40.17) = 214\angle 40.17 \text{ VA}$$

$$P = S.\cos(40.17) = 214.\cos(40.17) = 163.52 \text{ W.}$$

$$Q = S.\sin(40.17) = 214.\sin(40.17) = 138.04 \text{ VAR geri}$$

Yukarıda bulunan bu güçler, devredeki her bir elemanın aktif ve reaktif tipteki durumlarına göre kendi aralarındaki cebirsel toplam yaklaşımından da hesaplanabilir. Yani,

$$P \rightarrow R \text{ 'lerde}$$

$$Q \rightarrow L \text{ ve } C \text{ 'lerde}$$

$$L \rightarrow (+) \quad C \rightarrow (-)$$

$$P = I^2.(2) + I_{p1}^2.(5) + I_{p2}^2.(20) = 2.(4.28)^2 + 5.(3.39)^2 + 20.(1.86)^2 = 163.28 \text{ W.}$$

$$Q = I^2.(2) + I_{p1}^2.(10) - I_{p2}^2.(4) = 4.28^2.(2) + 3.39^2.(10) - 1.86^2.(4) = 137.72 \text{ VAR geride (endüktif)}$$

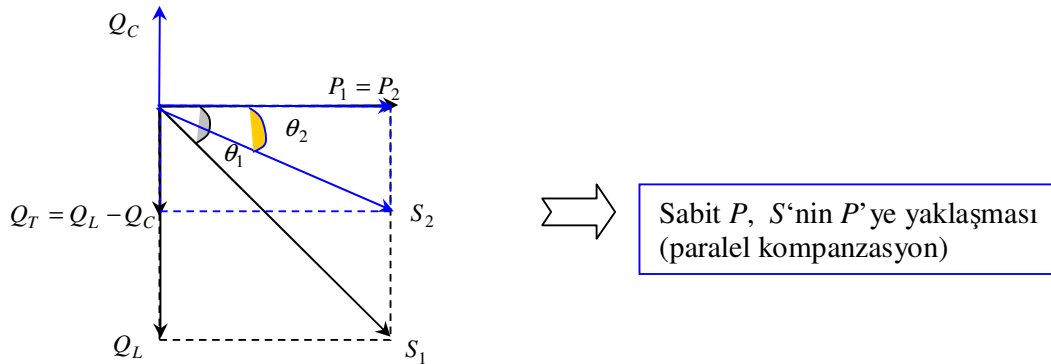
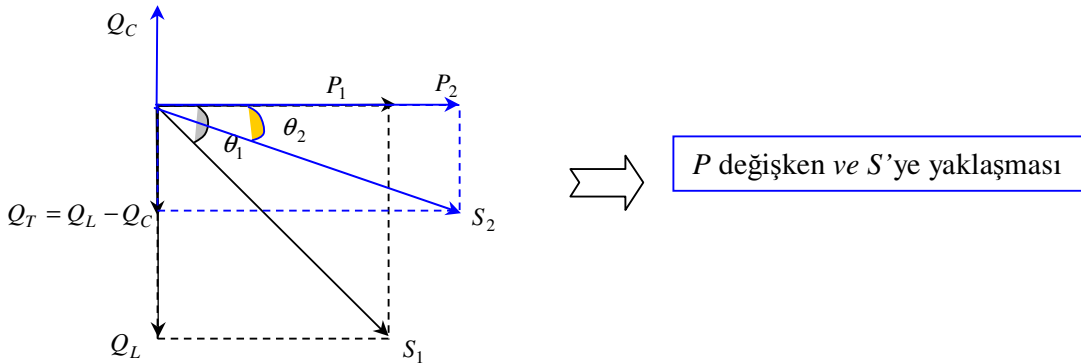
$$S = P + jQ = 163.28 + j137.72 = 213.60\angle 40.14 \text{ VA}$$

5.Güç Katsayısının Düzeltilmesi

Genelde yükler, evler ve endüstride endüktif karakterdedir (motorlar, floresan, şok bobinli lambalar vb). Akım gerilimden geri fazdadır. P aktif gücü, yükün birim zamanda yapabileceği faydalı işin ölçüsüdür. Santrallerden dağıtım hatları ve trafolar bu gücü aktarırlar. Ancak trafolar, faydalı gücü iletirken sabit gerilimle bu işi yaparlar. Güç ölçüsü ise VA' dir. Sadece endüktif veya kapasitif yük ile de bir trafo tamamen yüklenebilirken fakat ortalama güç olarak adlandırılan faydalı güç sıfır olabilir.

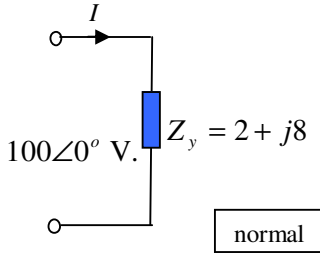
S görünür gücü, sistem yüklenmesinin ölçüsüdür. P ise sistem tarafından aktarılan faydalı işe dönüşen güçtür. $P = S \cdot \cos \theta$ ile S'nin gücü faydalı güce dönüşür. S'nin P'ye yaklaşması için θ sıfıra yaklaştırılır. Buna *güç katsayısının* ($\cos \theta$) *düzeltilmesi* veya *kompanzasyon* adı verilir. Bu işlem, sistemdeki reaktif güçlere neden olan L veya C elemanlarından birinin, devrenin durumuna göre reaktif gücü azaltacak şekilde devreye eklenmesiyle yapılır.

Endüktif yüklü durumlarda, genellikle yüke paralel C kapasitör yükleri bağlanır. Böylece yükün uçlarındaki gerilim aynı kalıp yükten alınan faydalı güç P de değişmez. Avantajı ise $\cos \theta$ arttığından akım ve görünür güç S de azalır. Aynı ihtiyaç duyulan P için daha düşük S kullanımı söz konusu olur. Güç ve dağıtım sistemi az yüklenir ve daha etkin kullanılmış olur.



Örnek:

$V = 100\angle 0^\circ$ V. beslemede, $Z_y = 2 + j8$ 'lık bir yük için güç katsayısı $\cos \theta = 0.8$ geri durumuna iyileştirilmek isteniyor. Normal, seri kapasitör ve paralel kapasitörlü durumlar için, akım, güç üçgeni ve gerekli C değerlerini analiz ediniz.

Normal için:

$$Z_y = 2 + j8 = 8.24\angle 75.96^\circ$$

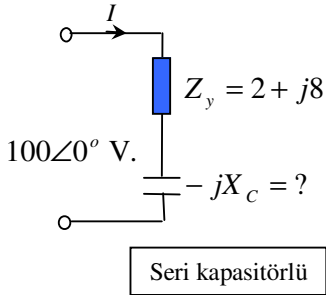
$$I = \frac{100\angle 0}{8.24\angle 75.96^\circ} = 12.13\angle -75.96^\circ \text{ A.}$$

$$S = V.I^* = (100\angle 0)(12.13\angle 75.96) = 1213\angle 75.96 \text{ VA}$$

$$Q_1 = 1213.\sin(75.95) = 1176.76 \text{ VAR}$$

$$P = 1213.\cos(75.95) = 294.27 \text{ W.}$$

$$\cos \theta_1 = \frac{P}{S} = \cos(75.95) = 0.24 \text{ geri (endüktif)}$$

Seri Kapasitörlü durum:

$$\theta_2 = \cos^{-1}(0.8) = 36.86^\circ \text{ geri}$$

$$Z = 2 + \underbrace{j8 - jX_c}_{jX} \quad \quad \quad \text{tg}(36.86) = \frac{X}{2}$$

$$X = \text{tg}(36.82).(2) = 1.5$$

$$X = 8 - X_c \quad \quad \quad X_c = 8 - 1.5 = 6.5$$

$$Z = 2 + j1.5 = 2.5\angle 36.86$$

$$I = \frac{100\angle 0}{2.5\angle 36.86} = 40\angle -36.86 \text{ A.}$$

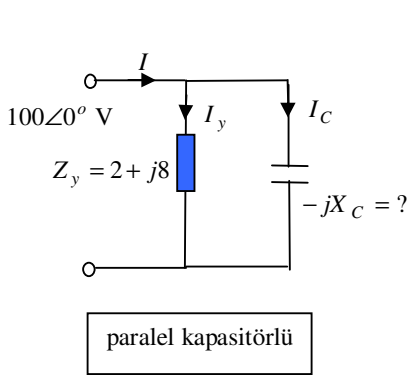
$$S = V.I^* = (100\angle 0)(40\angle 36.86) = 4000\angle 36.86$$

$$S = P + jQ_T = 3200 + j2399.44$$

$$Q_T = I^2(8 - X_c) = 40^2(8) - \underbrace{40^2.X_c}_{Q_c}$$

$$Q_c = 40^2(8) - 2399.44 = 10400.46 \text{ VAR ilerde (kapasitif)}$$

$$\text{veya } Q_c = I^2.X_c = 40^2(6.5) = 10400 \text{ VAR}$$

Paralel kapasitörlü durum:

$$I_y = \frac{100\angle 0}{(2 + j8)} = \frac{100\angle 0}{8.24\angle 75.96} = 12.13\angle -75.96 \text{ A.}$$

$$I_y = 2.94 - j11.76$$

$$I_C = \frac{100\angle 0}{X_C\angle -90} = I_C\angle 90 = jI_C$$

$$\theta_2 = \cos^{-1}(0.8) = 36.86^\circ \text{ geride}$$

$$Z = \frac{100\angle 0}{I\angle -36.86} = Z\angle 36.86$$

$$I\angle -36.86 = I_y + I_C = 2.94 - j11.76 + jI_C$$

$$\tan(-36.86) = \frac{-11.76 + I_C}{2.94} \quad \text{ise } I_C = 9.55 \text{ A.}$$

$$I = 2.94 - j11.76 + j9.55 = 3.67\angle -36.86$$

$$\text{veya } I = \frac{2.94}{\cos(-36.86)} = 3.67 \quad \text{veya } I = \frac{-11.76 + 9.55}{\sin(-36.86)} = 3.67$$

$$S = V.I^* = (100\angle 0)(3.67\angle 36.86) = 367\angle 36.86^\circ \text{ VA}$$

$$S = P + jQ_T = 293.36 + j220.50$$

$$Q_C = V.I_C = (100)(9.55) = 955 \text{ VAR kapasitif}$$

$$\text{veya } Q_C = Q_L - Q_T = (I_y^2 \cdot 8) - 220.50 = 12.13^2(8) - 220.50 \cong 956 \text{ VA}$$

Sonuç verileri:

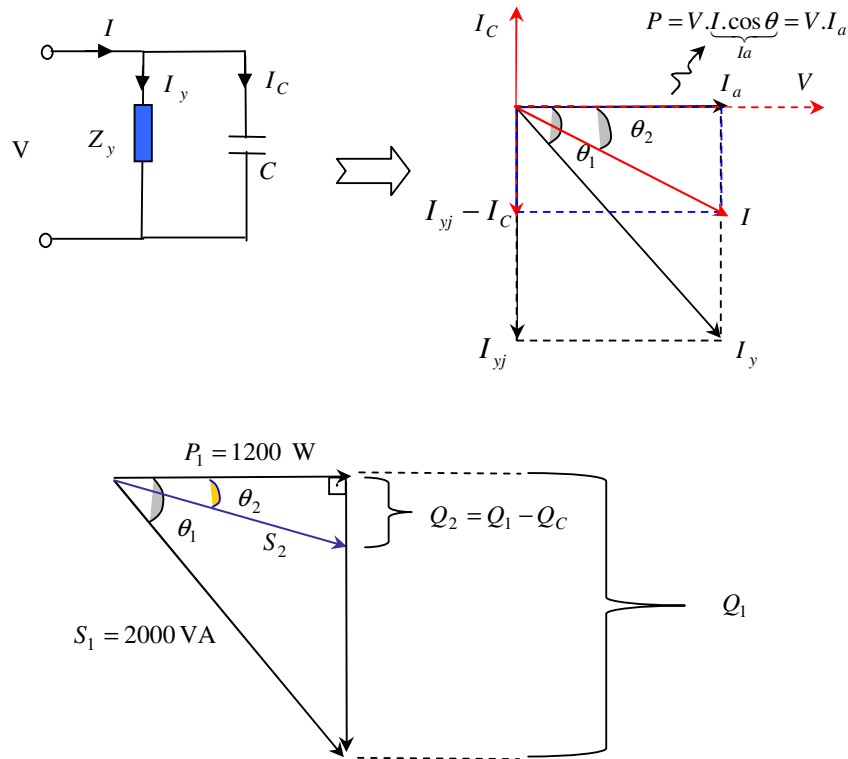
durum	$\cos \theta$	P (W)	Q (VAR)	S (VA)	I_y (A)	I (A)
normal	0.24 geri	294.27	1176.76	1213	12.13	12.13
Seri kapasitörlü	0.8 geri	3200	2399.44	4000	40	40
Paralel kapasitörlü	0.8 geri	294.27	220.50	367	12.13	3.67

Görüldüğü gibi seri kapasitörlüde, sistemin eşdeğer empedansı eklenen C kapasitörüyle düşmekte ve aynı gerilimde çekilen akım artmaktadır. Yük, bu durumda nominal değerinden daha fazla akım çekme durumunda olur ve zarar görebilir. Kaldı ki faydalı güç dışında istenmeyen ısı kayıpları ($I^2 R$) artar. Ayrıca bu durum, şebekenin daha fazla yüklenmesine de neden olur. Oysa paralel durumda aynı güç katsayısı için, yük şebekeye paralel olduğundan yüke ait akım ve P değişmemektedir. Yüke ait akımın dik sanal bileşeni paralel kondansatör akımıyla dengelenmekte ve şebekeden akım talebi yükteki performans kaybı olmadan düşebilmektedir. Daha düşük şebeke akımı ile sistem verimli bir şekilde işletilebilmektedir.

Yukarıda açıklanan prensip sonuçlar nedeniyle, güç katsayısı düzeltme işlemleri çoğunlukla *paralel kapasitörlü* yapılır. Bundan sonraki örnek analizlerde paralel kapasitörlü sistem ön görülecektir.

Örnek:

Aşağıdaki 2000 VA, 1200 W. 'lık sistemde paralel kapasitör ile güç katsayısını 0.9 geri değerine düzeltiniz. Gerekli kondansatör (kapasitör) VAR değerini bulunuz.



P sabittir (P=1200 W.)

$$Q_1 = \sqrt{S_1^2 - P_1^2} = \sqrt{2000^2 - 1200^2} = 1600 \text{ VAR geri}$$

$$\cos \theta_2 = 0.9 \text{ geri } \theta_2 = 26^\circ$$

$$S_2 = \frac{P}{\cos \theta_2} = \frac{1200}{0.9} = 1333 \text{ VA}$$

$$Q_2 = S_2 \cdot \sin \theta_2 = 1333 \sin(26) = 585 \text{ VAR geride veya } Q_2 = P \cdot \tan \theta_2$$

$$Q_2 = Q_1 - Q_C$$

$$Q_C = 1600 - 585 = 1015 \text{ VAR ileri}$$

Örnek:

25 kVA'lık bir trafo güç katsayısı 0.6 geride olan 12 kW'lık bir yükü beslemektedir. Trafonun taşıdığı yükün tam yüke olan oranı (yüklenme yüzdesini) bulunuz. Aynı trafo ile birim güç katsayılı ($\cos \theta = 1$) ek yüklerden trafonun tam yükü için kaç kW 'lık ek yükler gerekir?

$P_1 = 12 \text{ kW}$. Yük için,

$$S = \frac{12}{0.6} = 20 \text{ kVA} \quad \text{ve yüklenme oranı} \rightarrow \frac{20(\text{kVA})}{25(\text{kVA})} = 0.80 \quad \%80 \text{ yüklü}$$

$$\theta = \cos^{-1}(0.6) = 53.1^\circ$$

$$Q = S \cdot \sin \theta = 20 \sin(53.1) = 16 \text{ kVAR geri}$$

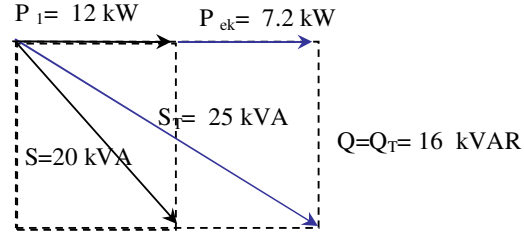
Eklenecek yüklerde sadece P aktif güçleri bulunuyor. Eklemeyle sistemin reaktif gücü Q değişmemektedir. Böylece, trafo tam yükte $S=25 \text{ kVA}$ ve $Q=16 \text{ kVAR}$ 'dır.

$$\theta_2 = \sin^{-1}\left(\frac{Q}{S}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{16}{25}\right) = 39.8^\circ$$

$$P_T = S \cdot \cos \theta_2 = 25 \cos(39.8) = 19.20 \text{ kW}$$

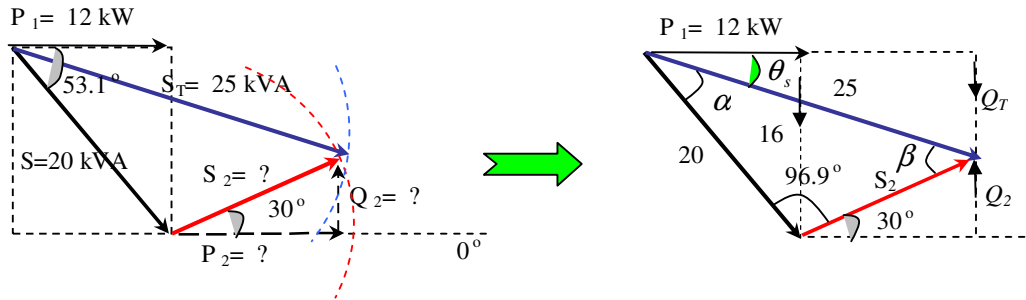
$$P_{ek} = P_T - P_1 = 19.20 - 12 = 7.2 \text{ kW}$$

$$\cos \theta_2 = \cos(39.8) = 0.76$$

**Örnek:**

Bir önceki soruda, sonradan eklenen yüklerin güç katsayıları 0.866 ileri ise, trafoyu tam yüklemek için kaç kVA'lık bu tür yük gerekir ?

Önceden bağlanan yük için: $S = 20 \text{ kVA}$ $\theta = 53.1^\circ$ ve $Q = 16 \text{ kVAR}$ geride idi. Oysa bu yüke eklenecek yükler için $\cos \theta_2 = 0.866$ ileri veya $\theta_2 = 30^\circ$ ileride yani kapasitif karakterli (R-C) yükler ekleniyor anlamına gelir.



$$\frac{25}{\sin 96.9} = \frac{20}{\sin \beta} \quad \beta = 52.6^\circ \quad \alpha = 180 - (96.9 + 52.6) = 30.5^\circ \quad \theta_s = 53.1 - 30.5 = 22.6^\circ$$

$$P_T = 25 \cdot \cos \theta_s = 25 \cos(22.6) = 23.08 \text{ kW}$$

$$P_2 = P_T - P_1 = 23.08 - 12 = 11.08 \text{ kW}$$

$$Q_T = 25 \cdot \sin \theta_s = 25 \sin(22.6) = 9.6 \text{ kVAR geride}$$

$$Q_2 = Q_1 - Q_T = 16 - 9.6 = 6.39 \text{ kVAR ileride}$$

$$S_2 = P_2 / \cos 30 = 11.08 / 0.866 = 12.88 \text{ kVA}$$

Örnek:

2 HP gücündeki bir indüksiyon AC motorun verimi %85'dir. Bunun nominal yükünde güç katsayısı 0.8 geridedir. Girişteki bütün güç verilerini hesaplayınız.

Hatırlatma: Bir motorun etiket gücü milinden alınan net mekanik güçtür. Motora aktarılan aktif gücün bir kısmı sargı bakır kayıplarına , bir kısmı sürtünme kayıplarına harcanır. Geri kalanı mekanik güçtür.

$$1 \text{ HP} = 736 \text{ W.}$$

$$\text{verim} = \frac{P_{mil}}{P_{elk}}$$

$$P_{elk} = P = \frac{2(736)}{0.85} = 1731.76 \text{ W}$$

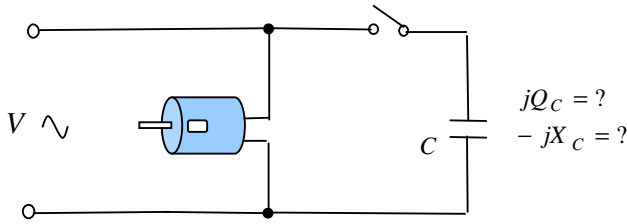
$$S = \frac{P}{\cos \theta} = \frac{1731.76}{0.8} = 2164.70 \text{ VA}$$

$$Q = S \cdot \sin \theta = (2164.70) \cdot \sin(36.8) = 1298.82 \text{ VAR geri}$$

Örnek:

Bir fazlı bir AC motorun verimi %70'dir. Motor nominal yükünde 220 V. 'da 2 A. çekiyor. Motor devresine bağlanan watmetre ise 250 W. göstermektedir.

- Motorun mil gücünü bulunuz.
- Motorun güç katsayısını bulunuz.
- Güç katsayısını 0.95 geri seviyesine düzeltmek için motora paralel bağlanacak kapasitif yükün değeri kaç VAR'dır ?



$$a) P = 250 \text{ W} \quad P_{mil} = P \eta = 250(0.7) = 175 \text{ W}$$

b)

$$S = V \cdot I = 220(2) = 440 \text{ VA} \quad Q_L = \sqrt{S^2 - P^2} = \sqrt{440^2 - 250^2} = 362.07 \text{ VAR geri}$$

veya,

$$\cos \theta_1 = \frac{P}{S} = \frac{250}{440} = 0.56 \quad \theta_1 = 55.37^\circ \quad Q_L = P \cdot \tan(\theta_1) = 250 \cdot \tan(55.37) = 362.07 \text{ VAR geri}$$

c)

$$\cos \theta_2 = 0.95 \text{ geri} \quad \theta_2 = 18.19^\circ \quad P = 250 \text{ W}$$

$$Q_{net} = P \cdot \tan \theta_2 = 250 \cdot \tan(18.19) = 82.17 \text{ VAR geri}$$

$$Q_{net} = Q_L - Q_C \quad Q_C = Q_L - Q_{net} = 362.07 - 82.17 = 279.89 \text{ VAR ileri}$$

$$X_C = \frac{V^2}{Q_C} = \frac{220^2}{279.89} = 172.91 \text{ ohm}$$

6.Rezonans Devreleri

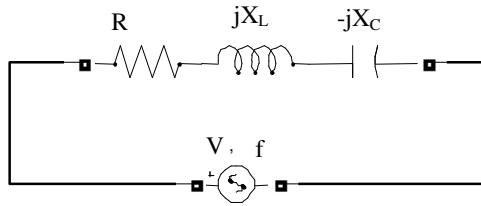
R, L ve C elemanlarının bulunduğu karmaşık bir devrenin rezonans durumları aşağıdadır. Bunların her biri aynı anlamı verir. Rezonans durumu, R, L ve C elemanlarının değerlerine ve frekansa bağlıdır.

1. Devrede V ile I arasındaki açı sıfırdır. Sistemde L ve C elemanları bulunmasına rağmen aynı fazdadırlar.
2. Devrenin eşdeğer karmaşık empedansının sanal terimi sıfırdır. Sadece gerçek terimlidir.

$$Z = R \pm \underbrace{jX}_0 \quad Z = R$$

3. Devrede eşdeğer reaktif güç sıfırdır. Sistemden sadece P aktif güç tüketimi söz konusudur. ($Q=0$ $S=P$).

Seri Rezonans:

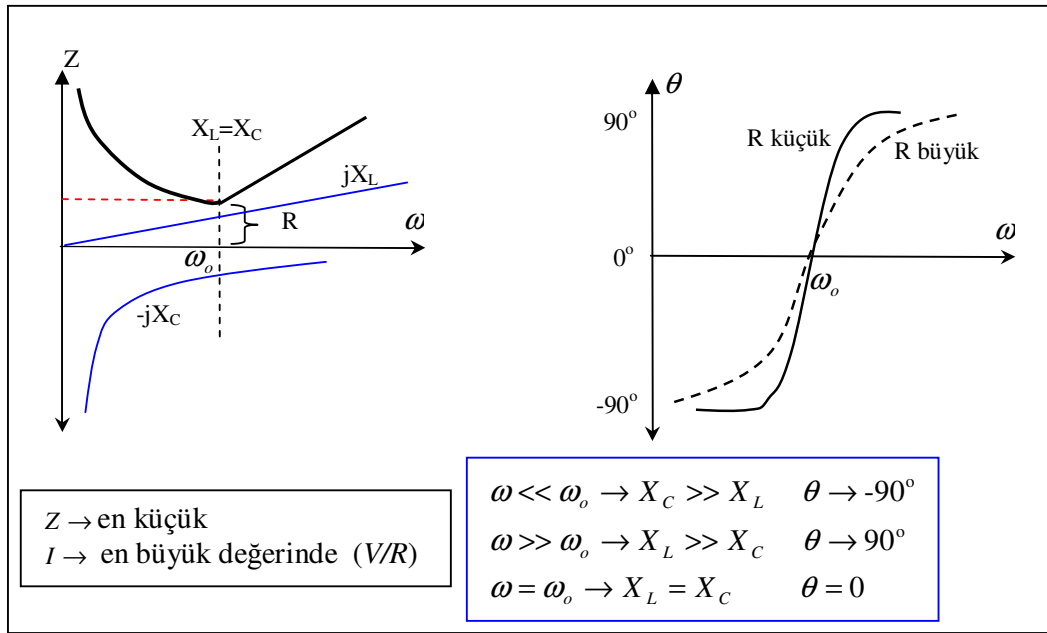


$$Z = R + \underbrace{jX_L - jX_C}_0$$

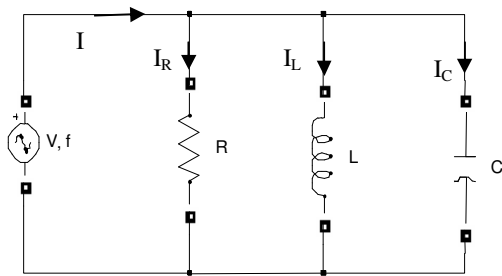
$$X_L = X_C \quad \omega_o \cdot L = \frac{1}{\omega_o C}$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

ω_o = rezonans anındaki açısal hız (rad/s), f_o = rezonans frekansı (Hz).



Paralel Rezonans:



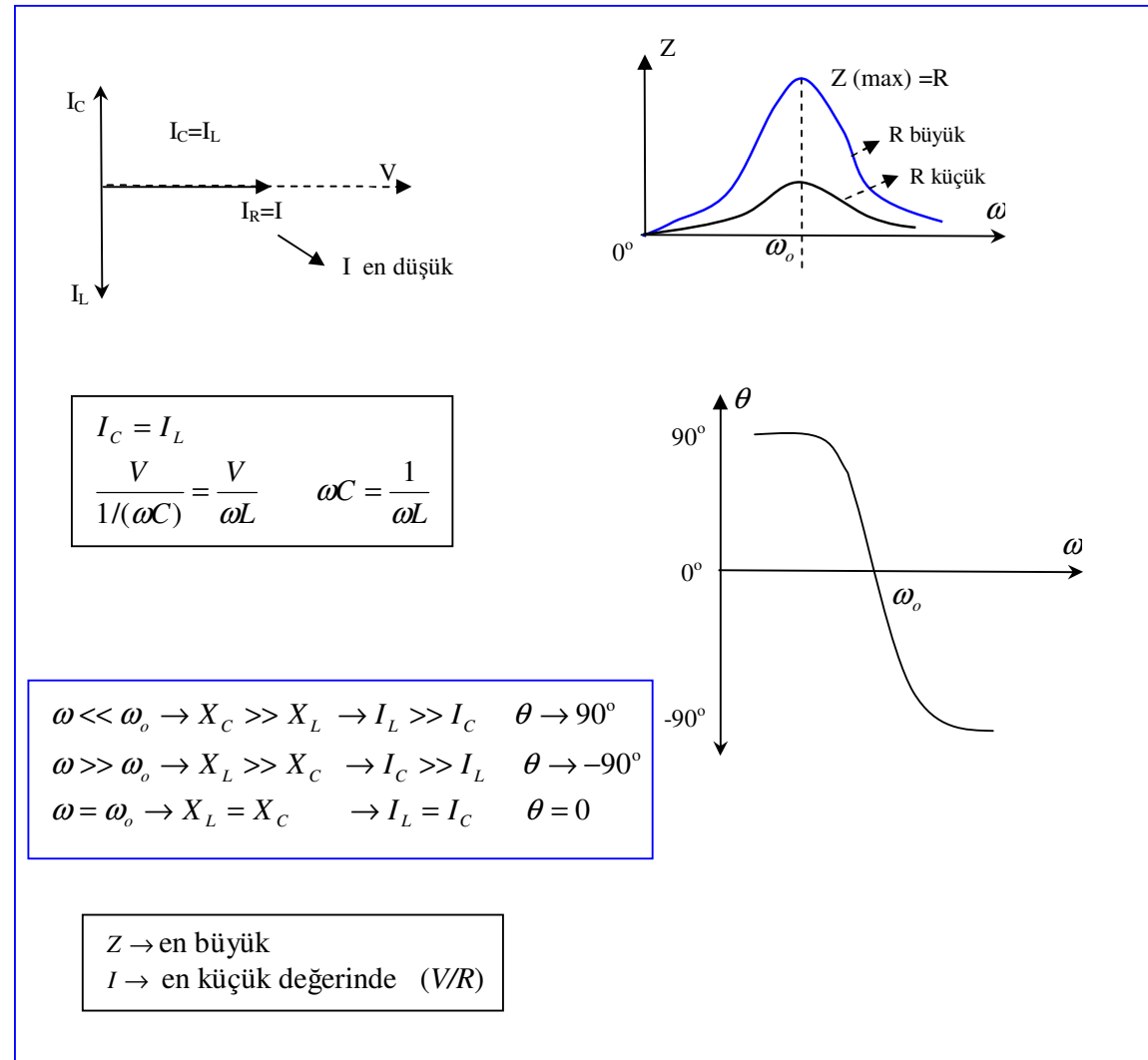
$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + \frac{1}{-j\frac{1}{\omega C}}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} - \frac{j}{\omega L} + \frac{j}{\omega C}$$

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{R} - \underbrace{j\frac{1}{\omega L} + j\omega C}_0$$

$$\frac{1}{\omega_o L} = \omega_o C \quad \omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad f_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

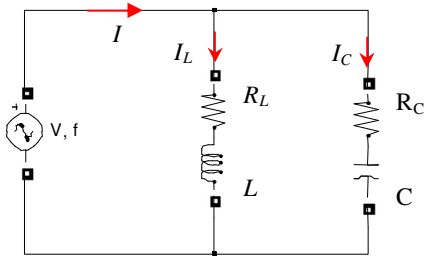
Aynı zamanda sistemin fazör diyagramından rezonans koşulları tanımlanabilir.

**Seri- Paralel karmaşık bir devredeki rezonans koşullarının analizi:**

Rezonans frekansı veya ω_o açısal hız analizi için:

- Sistemin eşdeğer empedansı veya admitansı (empedansın tersi $Y=1/Z$) ifade edilerek j 'li kısmı sıfır yapan ω (-böylece f değeri) hesaplanır.
- Diğer bir yöntem olarak, sistemin reaktif güç nedenleri olan fazör diyagramındaki reaktif akımların veya gerilimlerin kendileri arasında birbirlerini yok etme ifadelerinden yola çıkılarak ω bulunur. Başka deyimle $\cos \theta = 1$ yapan ω bulunur. Rezonansta $\omega \rightarrow \omega_o$ alınır.

İki Dalı Paralel Devredeki Rezonans:

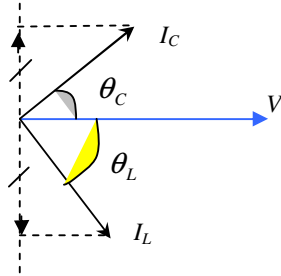


$$Y = Y_L + Y_C = \frac{1}{R_L + jX_L} + \frac{1}{R_C - jX_C} = \frac{1}{R_L + jX_L} + \frac{1}{R_C - jX_C} = \frac{R_L - jX_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C + jX_C}{R_C^2 + X_C^2}$$

$$= \left[\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} + \frac{R_C}{R_C^2 + X_C^2} \right] + j \underbrace{\left[\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \right]}_0$$

$$\frac{X_C}{R_C^2 + X_C^2} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \quad \frac{X_C}{Z_C^2} = \frac{X_L}{Z_L^2}$$

Aynı rezonans koşulu sonuç ifadesi, fazör diyagramından da bulunabilir.



$$I_C \cdot \sin \theta_C = I_L \cdot \sin \theta_L$$

$$\frac{V}{Z_C} \cdot \frac{X_C}{Z_C} = \frac{V}{Z_L} \cdot \frac{X_L}{Z_L}$$

$$\frac{X_C}{Z_C^2} = \frac{X_L}{Z_L^2}$$

Bu ifade ω cinsinden açılıp çözülürse:

$$\frac{1}{\omega C} = \frac{\omega L}{(\omega L)^2 + (R_L)^2}$$

$$\frac{1}{\omega C} \cdot (\omega^2 L^2 + R_L^2) = \omega L \left(\frac{1}{(\omega C)^2} + R_C^2 \right)$$

$$\omega^2 L^2 + R_L^2 = \omega^2 LC \frac{1}{\omega^2 C^2} + \omega^2 LC R_C^2$$

$$R_L^2 - \frac{L}{C} = \omega^2 \left[LC R_C^2 - L^2 \right]$$

$$R_L^2 - \frac{L}{C} = \omega^2 \cdot LC \cdot \left[R_C^2 - \frac{L}{C} \right]$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{(LC) \cdot \left[R_C^2 - \frac{L}{C} \right]}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}}$$

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}}$$

İÇİN:

$\omega_o > 0$ olmalıdır. Aksi halde rezonans yoktur.

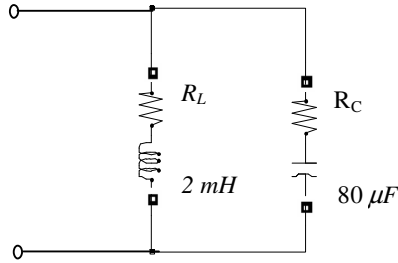
$R_L^2 > (\frac{L}{C})$ ve $R_C^2 > (\frac{L}{C})$ ise rezonans frekansı vardır.

$R_L^2 < (\frac{L}{C})$ ve $R_C^2 < (\frac{L}{C})$ ise rezonans frekansı vardır.

$R_L^2 = R_C^2 = \frac{L}{C}$ ise devre bütün frekanslarda rezonanstadır.

Örnek:

Aşağıdaki iki dallı paralel devrenin bütün frekanslarda rezonansta olması için, R_L ve R_C değerlerini bulunuz. Bütün frekanslarda rezonansta olduğunu iki örnek denemeyle gösteriniz.



$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \cdot \sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}}$$

$$R_L^2 = R_C^2 = \frac{L}{C} = \frac{(2)10^{-3}}{(80)10^{-6}} = 25$$

$$R_L = R_C = 5$$

$$\omega = 5000 \text{ rad/s}$$

$$X_C = \frac{1}{(5000)(80)10^{-6}} = 2.5$$

$$X_L = (5000)(2)10^{-3} = 10$$

$$\frac{2.5}{2.5^2 + 5^2} \stackrel{?}{=} \frac{10}{5^2 + 10^2}$$

$$0.08 = 0.08$$

$$\omega = 100 \text{ rad/s}$$

$$X_C = \frac{1}{(100)(80)10^{-6}} = 125$$

$$X_L = (100)(2)10^{-3} = 0.2$$

$$\frac{125}{125^2 + 5^2} \stackrel{?}{=} \frac{0.2}{5^2 + 0.2^2}$$

$$(7.9)10^{-3} = (7.9)10^{-3}$$

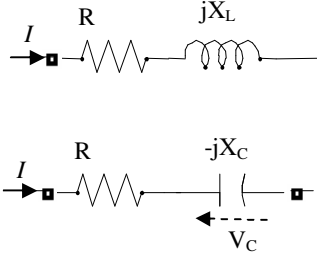
7. Nitelik Sayısı ,Yarı Güç Frekansları ve Rezonans ile ilgili örnekler

Nitelik Sayısı N.S

Bobinlerin L elemanlarında ve kondansatörlerde (C) enerji depo edilir. Bunların bulunduğu nitelik sayısı (N.S) aşağıda tanımlanmaktadır.

$$N.S = 2\pi \frac{\text{depolanan max. enerji}}{\text{devir başına enerji harcanması}}$$

Yukarıdaki ifadeden anlaşılacağı üzere, nitelik sayısı depo edilen enerjinin kaç tur (rad) sonra sönmünebileceğini verebilir. Seri RL ve RC devreler ele alınsın. Devir başına harcanan enerji, R direncinde harcanan ortalama gücün T periyodu ile çarpımıdır.



Seri RL devresi için:

$$N.S = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L I_m^2}{I^2 R \underbrace{\left(\frac{1}{f}\right)}_T} = 2\pi \frac{\frac{1}{2} L I_m^2}{\left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2 R \left(\frac{1}{f}\right)} = \frac{(2\pi f) L}{R} = \frac{\omega L}{R}$$

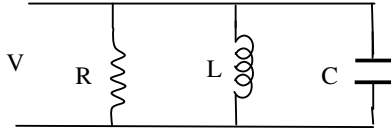
Seri RC devresi için:

$$N.S = 2\pi \frac{\frac{1}{2} V_{Cm}^2 C}{I^2 R \left(\frac{1}{f}\right)} = 2\pi \frac{\frac{1}{2} \left(I_m \cdot \frac{1}{\omega C}\right)^2 C}{\left(\frac{I_m}{\sqrt{2}}\right)^2 R \left(\frac{1}{f}\right)} = \underbrace{(2\pi f)}_{\omega} \cdot \frac{\omega^2 C}{R} = \frac{1}{\omega C R}$$

Rezonanstaki seri RLC devresi için:

Rezonanstaki seri RLC devresi sabit oranda enerji depolar. Bunun nedeni C 'deki gerilim maksimum iken L bobin akımı sıfır veya bunun tersi olmasıdır. Enerji depolama L ve C arasında sırayla olur. Rezonansta ise bu depolama miktarları eşittir.

$$\frac{1}{2} C V_m^2 = \frac{1}{2} L I_m^2, \quad N.S = \frac{\omega_o L}{R} = \frac{1/(\omega_o C)}{R} \quad \text{çünkü} \quad \omega_o L = \frac{1}{\omega_o C}$$

Rezonanstaki paralel devredeki N.S için:

L tarafına göre:

$$N.S = 2\pi \frac{\frac{1}{2} I_{Lm}^2 L}{V^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{1}{f}\right)} = 2\pi \frac{\frac{1}{2} \left(\frac{V_m}{\omega L}\right)^2 L}{\left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{f}} = \underbrace{(2\pi f)}_{\omega} R \cdot \left(\frac{1}{\omega^2 L}\right) = \frac{R}{\omega L}$$

C tarafına göre:

$$N.S = 2\pi \frac{\frac{1}{2} V_m^2 C}{V^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{1}{f}\right)} = (2\pi f) \frac{\frac{1}{2} V_m^2 C}{\left(\frac{V_m}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot \frac{1}{R} \cdot \frac{1}{f}} = \frac{\omega C}{\frac{1}{R}} = (\omega C) R$$

Rezonansta sabit oranda enerji depolanır.

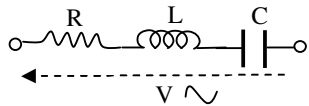
$$\frac{1}{2} C V_m^2 = \frac{1}{2} L I_{Lm}^2$$

Böylece, rezonansta N.S,

$$N.S = \frac{R}{\omega_o L} = R \omega_o C$$

Bant Genişliği ve Yarı Güç Frekansları

Seri bir RLC devresi için, aynı V gerilimi altında geniş bir frekans aralığındaki akım I ve aktif güç P cevapları analiz edildiğinde aşağıdaki sonuçlar elde edilebilir.



Seri RLC devresinde, rezonans anında I akımı en yüksek değerindedir. Çünkü empedans en düşük değerde olup sanal terimi sıfırdır. ($X_L = X_C$).

$$Z = R + \underbrace{j(X_L - X_C)}_0 = R \text{ ve } I = I_o = \frac{V}{Z} = \frac{V}{R}$$

Rezonanstaki devreye aktarılan aktif P gücü,

$$P(\max) = I^2 R = I(\max)^2 \cdot R = I_o^2 R$$

Diğer yandan, $I = \frac{I_o}{\sqrt{2}} = I_o \cdot (0.707)$ ise $P_{1,2}$ gücü,

$$P_{1,2} = \left(\frac{I_o}{\sqrt{2}}\right)^2 \cdot R = \frac{I_o^2 R}{2} = \frac{P(\max)}{2}$$

Bu $P_{1,2}$ yarı güç, rezonans akımının 0.707 katı akımda gerçekleşir.

Yarı güç koşullarında,

$$P_{1,2} = \frac{P(\max)}{2} = \frac{I_o^2 \cdot R}{2} = \left(\frac{V}{Z}\right)^2 R$$

$$\frac{\left(\frac{V}{Z}\right)^2 R}{2} = \frac{V^2}{Z^2} \cdot R$$

$$\frac{1}{R^2 2} = \frac{1}{Z^2} \quad \text{ise} \quad Z^2 = 2R^2$$

veya,

$$Z = \frac{V}{(I_o / \sqrt{2})} = \frac{V}{\underbrace{I_o}_R} \cdot \sqrt{2} \quad \text{ise} \quad Z = R\sqrt{2} \quad Z^2 = 2R^2$$

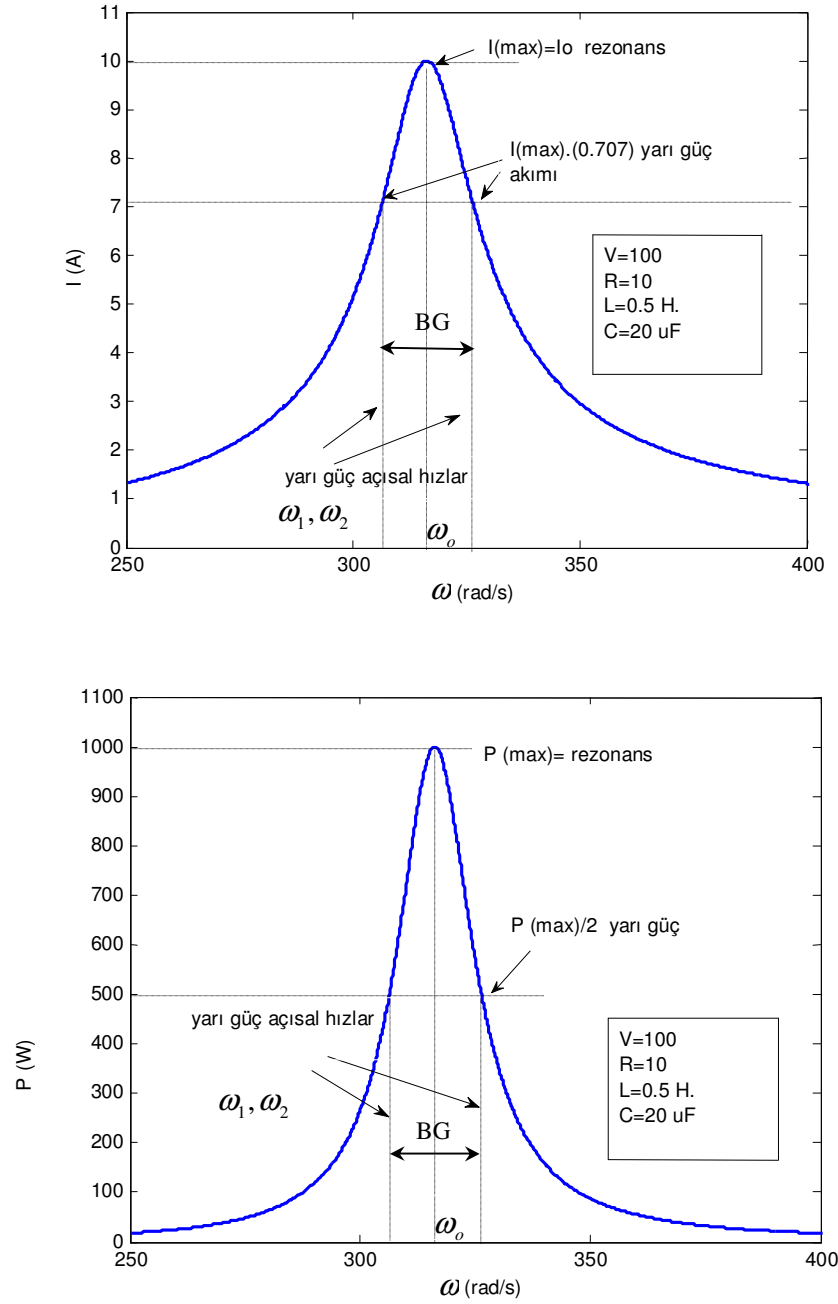
Bu eşitlik, empedans ifadesinde kullanıldığında yarı güç koşulları için aşağıdaki sonuç bulunur.

$$Z = R + \underbrace{j(X_L - X_C)}_X$$

$$Z^2 = R^2 + X^2 = 2R^2 \quad \text{ise} \quad R = X$$

X fark reaktansı olduğundan $R=X$ eşitliğini sağlayan ve rezonans frekansına eşit uzaklıkta iki frekans değeri vardır (f_1, f_2) Bunların birinde $X_L > X_C$, diğerinde ise $X_C > X_L$ 'dir. Fakat bunların her iki durumda da farkları R ' nin büyüklüğüne eşittir. Rezonans koşullarına göre yarı güç değerlerini sağlayan frekanslara *yarı güç frekansları*, açısal hızlara da *yarı güç açısal hızları* adı verilir. Yarı güç frekansları arasındaki büyüklük farkına *bant genişliği (BG)* adı verilir. Yarı güç frekanslarına aynı $I_o (0.707)$ akımı karşılık gelir. Çünkü bu durumlarda Z empedansının büyüklüğü aynıdır ve akımın büyüklüğü değişmez fakat açısı değişir.

Seri RLC devresindeki yarı güç frekanslarındaki akım ve güç değişimleri örnek olarak aşağıda verilmektedir.



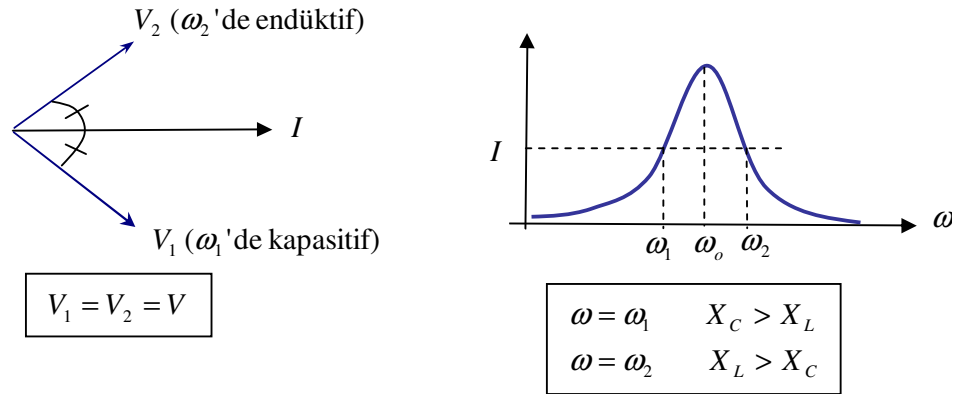
Rezonanstaki $N.S$, rezonans frekansı f_o ve bant genişliği BG arasındaki ilişkiler aşağıdadır. Ayrıca rezonans frekansı, yarı güç frekanslarının geometrik ortalamasıdır.

$$(N.S)_o = \frac{\omega_o}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_o}{\underbrace{f_2 - f_1}_{BG}} = \frac{f_o}{BG}$$

$$\omega_o = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2} \quad f_o = \sqrt{f_1 \cdot f_2}$$

Temel Örnekler:*Örnek 1.*

Seri RLC devresinde, rezonans frekansının yarı güç frekanslarının geometrik ortalaması olduğunu gösteriniz.



Yarı güç frekanslarında aynı akım çekilir empedanslar eşit olup, belirli bir R için reaktans farkı X , R 'ye eşittir. Biri ileri diğeri geri fazda olmak üzere eşit büyüklüklü açılar var olup reaktanslar farkı her iki durum için eşittir.

$$X = X$$

$$\frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = \omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}$$

$$\frac{1}{C} \left(\frac{1}{\omega_1} + \frac{1}{\omega_2} \right) = L(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\frac{1}{LC} = \frac{(\omega_1 + \omega_2)}{\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 \omega_2}} = \omega_1 \omega_2$$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{1}{LC}}}_{\omega_o} = \sqrt{\omega_1 \omega_2} \quad \omega_o = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$$

Örnek 2:

Rezonanstaki nitelik sayısının $(N.S)_o$, f_o / BG 'ye eşit olduğunu gösteriniz.

Yarı güç frekanslarında $R=X$ 'dir. Böylece,

$$\frac{1}{2\pi f_1 C} - (2\pi f_1)L = R \quad \text{ise} \quad f_1 = \frac{-R + \sqrt{R^2 + \frac{4L}{C}}}{4\pi L}$$

$$(2\pi f_2)L - \frac{1}{2\pi f_2 C} = R \quad \text{ise} \quad f_2 = \frac{R + \sqrt{R^2 + \frac{4L}{C}}}{4\pi L}$$

$$BG = f_2 - f_1$$

$$BG = \frac{R + \sqrt{R^2 + \frac{4L}{C}}}{4\pi L} - \frac{-R + \sqrt{R^2 + \frac{4L}{C}}}{4\pi L} = \frac{2R}{4\pi L} = \frac{R}{2\pi L}$$

$$BG = \frac{R}{2\pi L} \cdot \frac{f_o}{f_o}$$

$$BG = \frac{R}{\underbrace{\omega_o L}_{1/(N.S)}} \cdot f_o = \frac{f_o}{(N.S)_o} \quad \text{ise} \quad (N.S)_o = \frac{f_o}{BG}$$

Örnek:

$R=100$ ohm, $L=0.5$ H. Ve $C=40 \mu F$ ise seri RLC devresi için rezonans ve yarı güç frekanslarını bulunuz.

$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{(0.5)(40)10^{-6}}} = 223.60 \quad f_o = \frac{\omega_o}{2\pi} = 35.60$$

$$Z^2 = R^2 + X^2 = 2R^2 \quad R = X$$

$$\frac{1}{\omega_1 C} - \omega_1 L = R$$

$$R\omega_1 C = 1 - \omega_1^2 LC \quad \omega_1^2 LC + R\omega_1 C - 1 = 0 \quad \text{ise} \quad \omega_1 = 145 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C} = R$$

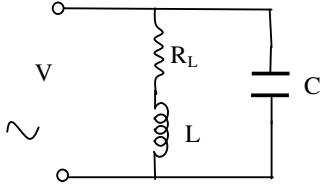
$$\omega_2^2 LC - RC\omega_2 - 1 = 0 \quad \text{ise} \quad \omega_2 = 345 \text{ rad/s}$$

Ayrıca,

$$\omega_o = \sqrt{\omega_1 \omega_2} = \sqrt{(145)(345)} = 223.6 \text{ rad/s} \quad \text{olmakta ve işlem sağlamaktadır.}$$

Örnek

Devrenin rezonans koşullarını bulunuz ve rezonans frekansını ifade ediniz.



$$Y_T = \frac{1}{R_L + jX_L} + \frac{1}{-jX_C} = \frac{R_L - jX_L}{R_L^2 + X_L^2} + j\frac{1}{X_C}$$

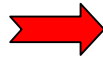
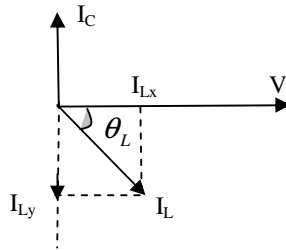
$$= \left[\frac{R_L}{R_L^2 + X_L^2} \right] + j \underbrace{\left[\frac{1}{X_C} - \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2} \right]}_0$$

$$\frac{1}{X_C} = \frac{X_L}{R_L^2 + X_L^2}$$

$$\omega_o C = \frac{\omega_o L}{R_L^2 + (\omega_o L)^2} \rightarrow R_L^2 C + \omega_o^2 L^2 C = L$$

$$\omega_o = \sqrt{\frac{L - R_L^2 C}{L^2 C}} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R_L^2 C}{L}}$$

veya,



$$I_C = I_L \sin \theta_L$$

$$\frac{V}{X_C} = \frac{V}{Z_L} \cdot \frac{X_L}{Z_L}$$

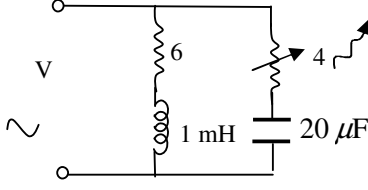
$$\frac{1}{X_C} = \frac{X_L}{Z_L^2}$$

$$\omega_o C = \frac{\omega_o L}{R_L^2 + (\omega_o L)^2}$$

Aynı sonuç bulunur.

Örnek:

Şekildeki devrenin RC dalında, direnç arttırılırsa, rezonans frekansının olabilmesi için alabileceği en büyük sınır değeri kaç olmalıdır.



İki dalı paralel devrede daha önce değinildiği gibi, rezonans açısal hız eşitliği aşağıdadır. Devrenin değerleri yerlerine yazılmaktadır.

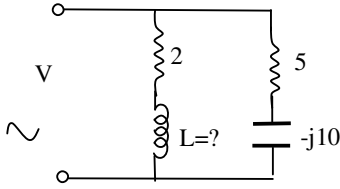
$$\omega_o = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{\frac{R_L^2 - \frac{L}{C}}{R_C^2 - \frac{L}{C}}} = \frac{1}{\sqrt{(1)10^{-3}(20)10^{-6}}} \sqrt{\frac{6^2 - \frac{1 \cdot 10^{-3}}{(20)10^{-6}}}{4^2 - \frac{1 \cdot 10^{-3}}{(20)10^{-6}}}} = \frac{1}{\sqrt{(1)10^{-3}(20)10^{-6}}} \sqrt{\frac{36 - 50}{16 - 50}}$$

Değişken taraf RC tarafı olduğu için, kök içi paydası sıfır veya pozitif olduğunda devrenin rezonans frekansı bulunmaz. Böylece 4 ohm luk direncin olması gereken en yüksek değeri için:

$$R_C^2 < \frac{L}{C} \quad \frac{L}{C} = 50 \quad \text{ise} \quad R_C < \underbrace{\sqrt{50}}_{7.07} \quad \text{olmalıdır.}$$

Örnek:

Şekildeki devre $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ 'de rezonansa ise gereken L değerini bulunuz.



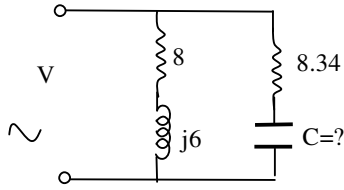
$$Y = \frac{1}{2 + jX_L} + \frac{1}{5 - j10} = \dots = \left(\frac{2}{4 + X_L^2} + \frac{5}{125} \right) + j \underbrace{\left(\frac{10}{125} - \frac{X_L}{4 + X_L^2} \right)}_0$$

$$\frac{10}{125} = \frac{X_L}{4 + X_L^2} \quad X_L^2 - 12.5X_L + 4 = 0 \quad \Delta = (12.5)^2 - (4) \cdot (1) \cdot (4)$$

$$X_L = \frac{-(-12.5) \pm \sqrt{\Delta}}{2(1)} = \begin{matrix} \rightarrow 0.33 \\ \rightarrow 12.17 \end{matrix} \quad \text{ise} \quad \begin{matrix} L_1 = 0.33/5000 = 0.06 \text{ mH} \\ L_2 = 12.17/5000 = 2.4 \text{ mH} \end{matrix}$$

Örnek:

Şekildeki devre $\omega = 5000 \text{ rad/s}$ 'de rezonansa ise gereken C değerini bulunuz.



Bir önceki probleme benzer olarak, iki dallı paralel devredeki rezonans koşullarında:

$$\frac{X_C}{Z_C^2} = \frac{X_L}{Z_L^2}$$

$$\frac{X_C}{8.34^2 + X_C^2} = \frac{6}{6^2 + 8^2} \quad X_C^2 - 16.57 X_C + 69.55 = 0 \quad \Delta = (16.7)^2 - (4)(1)(69.55)$$

$$X_C = \frac{-(-16.57) \pm \sqrt{\Delta}}{2(1)} = \begin{matrix} \rightarrow 7.9 \\ \rightarrow 8.76 \end{matrix} \quad \text{ise} \quad \begin{matrix} C_1 = 1/[(7.9)(5000)] = (25.31)10^{-6} \text{ F} = 25.31 \mu\text{F} \\ C_2 = 1/[(8.76)(5000)] = (22.81)10^{-6} \text{ F} = 22.81 \mu\text{F} \end{matrix}$$

8. Rezonanstaki Akımın Durumu

Herhangi bir devrenin rezonans koşullarındaki akım durumunu, rezonans koşullarındaki eşdeğer empedansın ifadesi belirler. Kimi durumlarda eşdeğer Z empedansının gerçek terimi R_e , X_L veya X_C lerden bağımsız böylece ω 'dan bağımsız olabileceği gibi, kimi durumlarda gerçek terim R_e , ω terimlerini de içerebilir. R_e , ω 'dan bağımsız ise j 'li sanal terim rezonansa sıfırlandığından akım V/R_e olarak tanımlanır. Fakat R_e ω terimlerini içeriyorsa, rezonans koşullarındaki j 'li terimin sıfırlanmasındaki koşullar R_e değerini değiştirebilir ve bu durumda akımı, R_e değerinin yeni değeri belirler. Böylece belir bir V gerilimi için, rezonanstaki devre akımının en büyük, en küçük veya orta bir değerde mi olduğunu rezonansa bağlı R_e 'nin değeri belirler.

$$Z = R_e + j \underbrace{X_0}$$

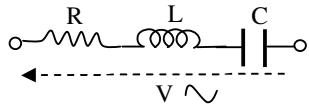
$$R_e \neq f(X_L, X_C, \omega) \quad \text{olabilir.}$$

$$R_e = f(X_L, X_C, \omega)$$

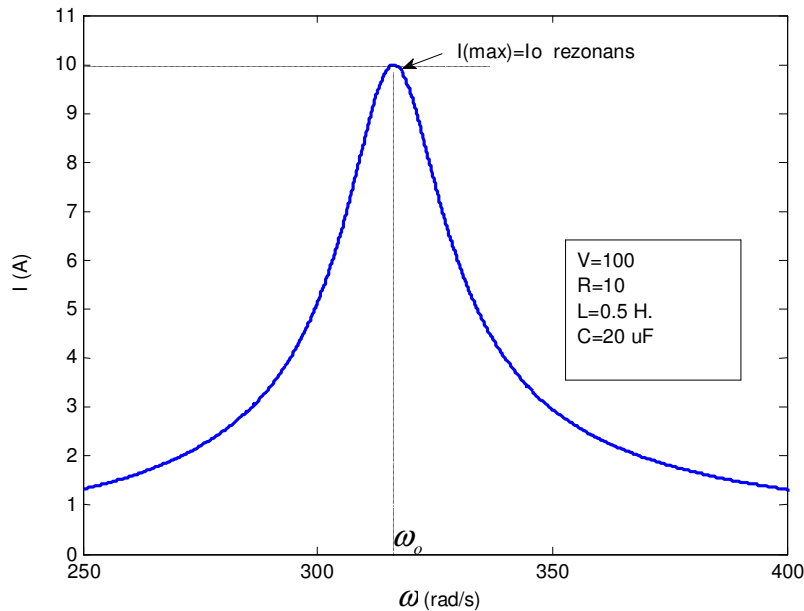
Bu konuyla ilgili aşağıda iki örnek durum verilmektedir.

Durum 1:

Aşağıdaki Seri RLC devresinde rezonansa R elemanının rezonans koşullarına göre değeri değişmez ve rezonansa sistem empedansı sadece R 'den oluşur ve en düşük değerindedir. Bu durum rezonansa akımı en büyük değerde yapmaktadır.

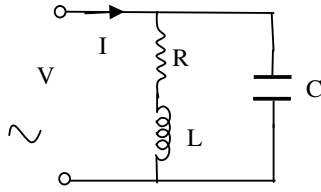


$$Z = R + j \underbrace{(X_L - X_C)}_0 = R = R_e$$



Durum 2:

Aşağıdaki örnek devrede ise rezonans koşulları sistemin eşdeğer empedansının gerçek terimi olan R_e terimini etkilemektedir. R_e rezonans koşullarına göre yeni değer almaktadır.



$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{-jX_C} + \frac{1}{R + jX_L} = \frac{j}{X_C} + \frac{R - jX_L}{R^2 + X_L^2} = \frac{j(R^2 + X_L^2) + X_C(R - jX_L)}{X_C(R^2 + X_L^2)}$$

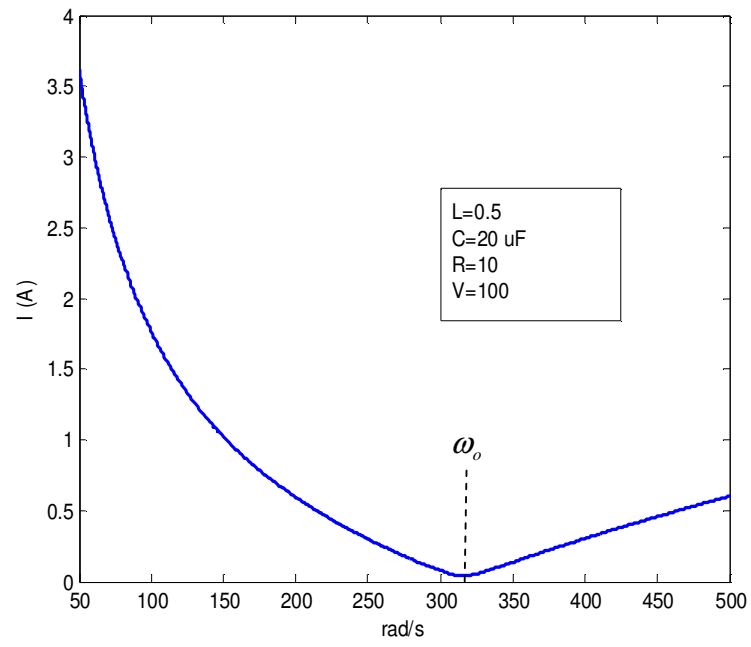
$$Z = \frac{X_C(R^2 + X_L^2)}{RX_C + j(X_L^2 + R^2 - X_L X_C)} = \frac{X_C(R^2 + X_L^2)[RX_C - j(X_L^2 + R^2 - X_L X_C)]}{(RX_C)^2 + [X_L^2 + R^2 - X_L X_C]^2}$$

$$Z = \underbrace{\frac{RX_C^2(R^2 + X_L^2)}{(RX_C)^2 + [X_L^2 + R^2 - X_L X_C]^2}}_{\text{Re}} - j \underbrace{\left[\frac{X_C(R^2 + X_L^2)(X_L^2 + R^2 - X_L X_C)}{(RX_C)^2 + [X_L^2 + R^2 - X_L X_C]^2} \right]}_{X=0}$$

Rezonansta $X_L^2 + R^2 - X_L X_C = 0$ olmalıdır. Bu durumda Z 'in sanal bileşeni sıfır olur aynı zamanda R_e gerçek terimi ise aşağıdaki yeni şeklini alır.

$$R_e = \frac{RX_C^2(R^2 + X_L^2)}{(RX_C)^2 + \underbrace{[X_L^2 + R^2 - X_L X_C]}_0} = \frac{RX_C^2(R^2 + X_L^2)}{(RX_C)^2} = \frac{(R^2 + X_L^2)}{R}$$

Bu örnek devrede, rezonans koşulları j 'li terimi sıfır yaparken, aynı zamanda normal eşdeğer Z empedansındaki R_e 'nin değerini yükseltir. Aşağıda durum 2'ye ait örnek veriler için yapılan analiz göstermektedir ki R_e rezonans koşullarında alabileceği en büyük değerini almakta ve böylece sabit bir V gerilimi için I devre akımı en düşük seviyesinde olmaktadır. I en düşük değer aldığından $S=V.I$ en düşük seviyede olur. Rezonansta $S=P$ olduğundan P aktif güç tüketimi de en düşük seviyede olur.



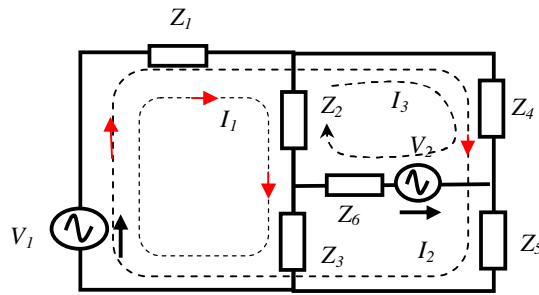
9. AC Analizde Çevre Akımları, Düğüm Gerilimleri , Thevenin ve Norton Yöntemleri

AC analizdeki çevre akımları, düğüm gerilimleri, Thevenin ve Norton yöntemleri prensip olarak dc devre analizdeki durumlara benzer. Farkı ise kaynaklar ve empedanslar karmaşık sayı şeklinde kullanılır. Öncelikle verilen L ve C elemanlarının reaktansları ön görülen frekans için hesaplanır ve daha sonra devrenin karmaşık sayılı empedansları tanımlanır.

9.1. Çevre Akımları Yöntemi

Çevre akımları yönteminde, devrede herhangi bir yönde çevre akımları ön görülür. Çevre akımının geçmediği hiçbir eleman kalmaz. Bir elemandan farklı çevre akımları da geçebilir. Her çevre için uygulanan Khirchof gerilim kuralının bir sonucu olarak akım empedans gerilim matrisleri tanımlanır. Empedans ve gerilim matrislerinin her bir satırı, ön görülen çevre akımının yönü baz alınarak ifade edilir. Komşu çevre akımlarının ortak empedanslardaki etkileri için akım yönleri aynı ise (+), ters ise (-) işaretler ilgili empedans önlerinde kullanılır. Benzer şekilde gerilim matrisinde, ilgili çevre akımıyla aynı yönlü kaynaklar (+), ters yönlü kaynaklar ise (-) işaretini alır. Empedans, akım ve gerilim matrisleri tanımlandıktan sonra çevre akımları matris yöntemiyle bulunur. Bulunan çevre akımları devredeki elemanların akım, gerilim ve güçlerinin analiz edilmesinde yardımcı olur.

Aşağıda örnek bir devre için, ön görülen çevre akımlarına göre empedans, akım ve gerilim matrisleri ifade edilmektedir.



Not: Gerilim kaynakları sinüs ac olmalarına rağmen, herhangi bir andaki verebilecekleri akım yönleri (veya polariteleri) birden fazla kaynaklı devrelerde önemli olduğundan bu yönler belirtilir.

$$[Z].[I] = [V]$$

$$\begin{bmatrix} (Z_1 + Z_2 + Z_3) & Z_1 & -Z_2 \\ Z_1 & (Z_1 + Z_4 + Z_5) & Z_4 \\ -Z_2 & Z_4 & (Z_2 + Z_4 + Z_6) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_1 \\ -V_2 \end{bmatrix}$$

Not: Kaynaklar ve Z empedans değerleri karmaşık sayı şeklinde yazılır.....

Genel durum:

Çevre akımları yönteminde, devrenin $[Z].[I]=[V]$ matrisi aşağıdaki gibi olsun. Burada Z empedans matris elemanlarındaki indisler aynı zamanda matriste bulundukları adresi ifade etmektedir.

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

Z matrisinin köşegenleri dışındaki elemanların işaretleri devrenin durumuna göre + veya - işaretli olabilir. Kramer kuralına göre I matrisi çözülebilir.

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix} \quad (Z \text{ empedans matrisinin determinanı})$$

m. Satır ve n. Sütündaki bir elemanın işaretli minör ifadesi, ilgili matriste bu elemanın bulunduğu satır ve sütun kapatıldıktan sonra geri kalan matrisin determinantıyla (-1)'in adres toplamı kuvvetiyle çarpımıdır. Örneğin,

$$\Delta_{12} = (-1)^{(1+2)} \cdot \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{33} \end{vmatrix}$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & Z_{12} & Z_{13} \\ V_2 & Z_{22} & Z_{23} \\ V_3 & Z_{32} & Z_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_Z}, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{11} & V_1 & Z_{13} \\ Z_{21} & V_2 & Z_{23} \\ Z_{31} & V_3 & Z_{33} \end{vmatrix}}{\Delta_Z} \quad \text{ve} \quad I_3 = \frac{\begin{vmatrix} Z_{12} & Z_{12} & V_1 \\ Z_{21} & Z_{22} & V_2 \\ Z_{31} & Z_{32} & V_3 \end{vmatrix}}{\Delta_Z}$$

Bu çevre akımlarının çözümü için yukarıdaki determinantlar V gerilimlerinin bulunduğu sütünlara göre ifadelendirilirse,

$$I_1 = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_Z} \right)$$

$$I_2 = V_1 \left(\frac{\Delta_{12}}{\Delta_Z} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{22}}{\Delta_Z} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{32}}{\Delta_Z} \right)$$

$$I_3 = V_1 \left(\frac{\Delta_{13}}{\Delta_Z} \right) + V_2 \left(\frac{\Delta_{23}}{\Delta_Z} \right) + V_3 \left(\frac{\Delta_{33}}{\Delta_Z} \right)$$

Giriş (sürüş) noktası empedansı:

Devrenin ön görülen giriş bölgesindeki kaynak dışında diğer kaynaklar sıfırlanıp, bu durumdaki giriş geriliminin giriş akımına olan oranıdır. Kaynak iç empedansları işleme dahil edilir.

Örneğin V_1 gerilimi giriş olarak kabul edilirse,

$$I_{1gir} = V_1 \left(\frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} \right) + \underbrace{(0) \left(\frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} \right) + (0) \left(\frac{\Delta_{31}}{\Delta_Z} \right)}_0$$

$$Z_{gir} = \frac{V_1}{I_{1gir}} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}}$$

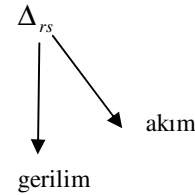
Transfer empedansı:

Devredeki herhangi bir çevredeki gerilimin, diğer kaynaklar sıfırlanıp başka bir çevrede neden olduğu akıma oranıdır.

Örneğin r çevresindeki gerilimin, s çevresindeki akıma olan etkisindeki transfer empedansı için,

$$I_s = \underbrace{(0) \left(\frac{\Delta_{1s}}{\Delta_Z} \right) + (0) \left(\frac{\Delta_{2s}}{\Delta_Z} \right) + \dots}_{0} + V_r \left(\frac{\Delta_{rs}}{\Delta_Z} \right) + \underbrace{\dots}_{0}$$

$$Z_{trms(rs)} = \frac{V_r}{I_s} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rs}}$$

Süperpozisyon teoremi sağlaması:

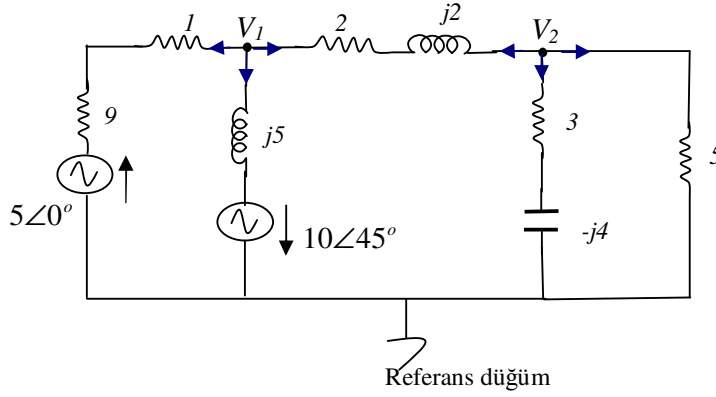
Yukarıda çevre akımları için verilen ve V gerilimlerine göre tanımlanan akım ifadelerinden görüleceği gibi, herhangi bir çevreden geçen net akım, devredeki bütün kaynaklardan her birinin bu çevreye olan etkilerinin bileşkesidir. Çünkü her hangi bir çevre akımı ifadesinde, bütün kaynak terimleri yer almaktadır. Bu durum, devredeki herhangi bir akımın devredeki her kaynak için tek başına besleme durumunda bulunabilecek akımların bileşkesinin sonucunu ifade eden süperpozisyon teoremi anlamını verir.

9.2. Düğüm Gerilimleri Yöntemi

Devrede dal akımlarının birleştiği noktalar düğümdür. Bu düğümlerden biri referans düğümdür. Herhangi bir düğüm gerilimi, ilgili düğüm ile referans nokta arasındaki gerilimdir. Düğüm gerilimleri yönteminde, empedansın tersi olan admitans ($Y=1/Z$), gerim ve akım matrisleri tanımlanır. Matris ifadesi bir düğüm noktasındaki Khirchof akım yasasının bir sonucudur. Akımlar düğümlerden çıkıyor kabul edilir. Admitans matrisinin her bir satırı bir düğüm için yapılandırılır ve ilgili düğüm baz olarak alınır. Düğüme bağlı admitanslar her düğüm için toplanır. Komşu düğümlerdeki ortak empedanslar düğümlerden çıkıyor kabul edilen akımların yönlerine göre işaret alır. Akım matrisi de dallardaki kaynak gerilimlerinin ilgili düğüme bağlayan empedanslara olan oranlarıyla her düğüm için tanımlanır. Yönleri düğüme giren kaynaklar (+), çıkan kaynaklar (-) işaretini alır. Bu durum, düğüm gerilimlerine göre tanımlanan dal akımları toplamı sıfıra eşitlendiğinde, kaynak gerilim terimli akım ifadelerinin eşitliği karşı tarafına ters işaretli geçmesinin bir sonucudur.

Analizde matris yöntemiyle ön görülen düğüm gerilimleri bulunur. Bulunan düğüm gerilimleri yardımıyla devrenin diğer ilgili akım gerilim ve güç durumları analiz edilebilir. Düğüm gerilimlerinde kare matris boyutu, devredeki referans düğüm dahil düğüm sayısının bir eksiği olabilmektedir.

Aşağıda örnek bir devrenin düğüm gerilimlerine göre tanımlanan matris ifadeleri verilmektedir. $[Y].[V]=[I]$ ifadesinden V düğüm gerilim matrisi, çevre akımları yöntemindeki akımların bulunmasındaki yöntemle benzer şekilde bulunabilir.

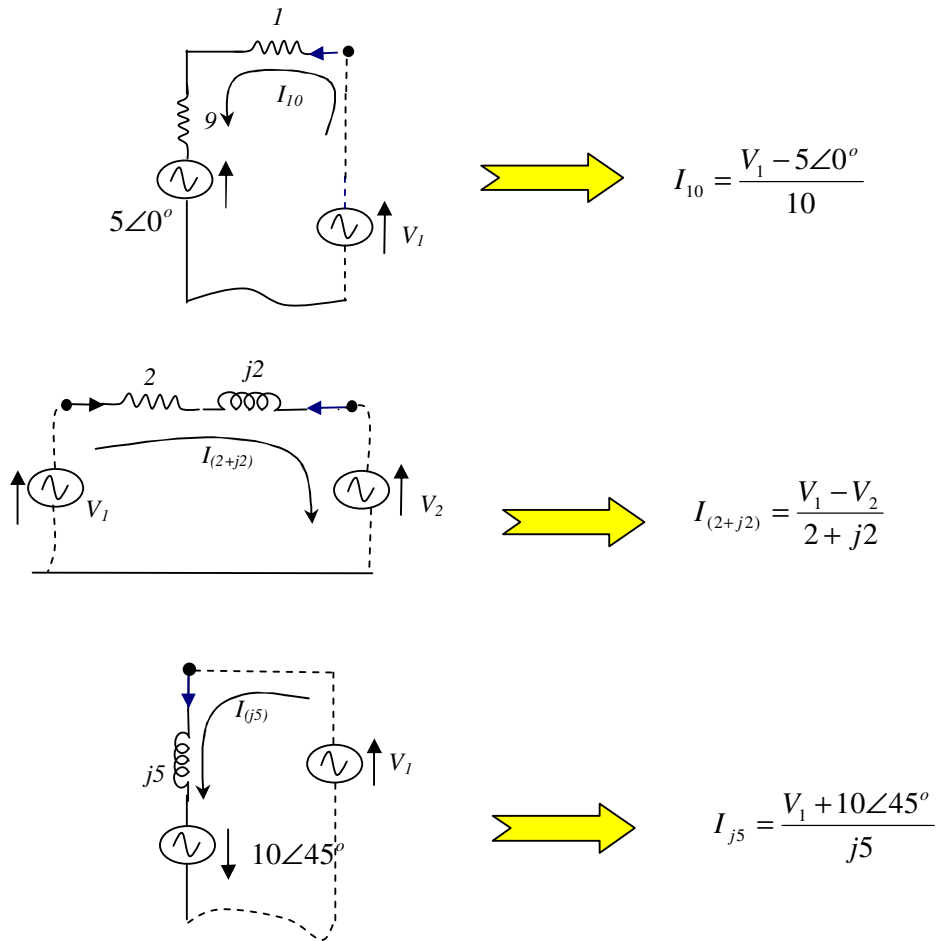


$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{9+1} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2+j2}\right) & -\frac{1}{2+j2} \\ -\frac{1}{2+j2} & \left(\frac{1}{2+j2} + \frac{1}{3-j4} + \frac{1}{5}\right) \end{bmatrix}}_Y \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}}_V = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{5\angle 0^\circ}{10} - \frac{10\angle 45^\circ}{j5} \\ 0 \end{bmatrix}}_I$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{5\angle 0^\circ}{10} - \frac{10\angle 45^\circ}{j5} & -\frac{1}{2+j2} \\ 0 & (\frac{1}{2+j2} + \frac{1}{3-j4} + \frac{1}{5}) \end{vmatrix}}{\Delta_Y},$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} (\frac{1}{10} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{2+j2}) & \frac{5\angle 0^\circ}{10} - \frac{10\angle 45^\circ}{j5} \\ -\frac{1}{2+j2} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y}$$

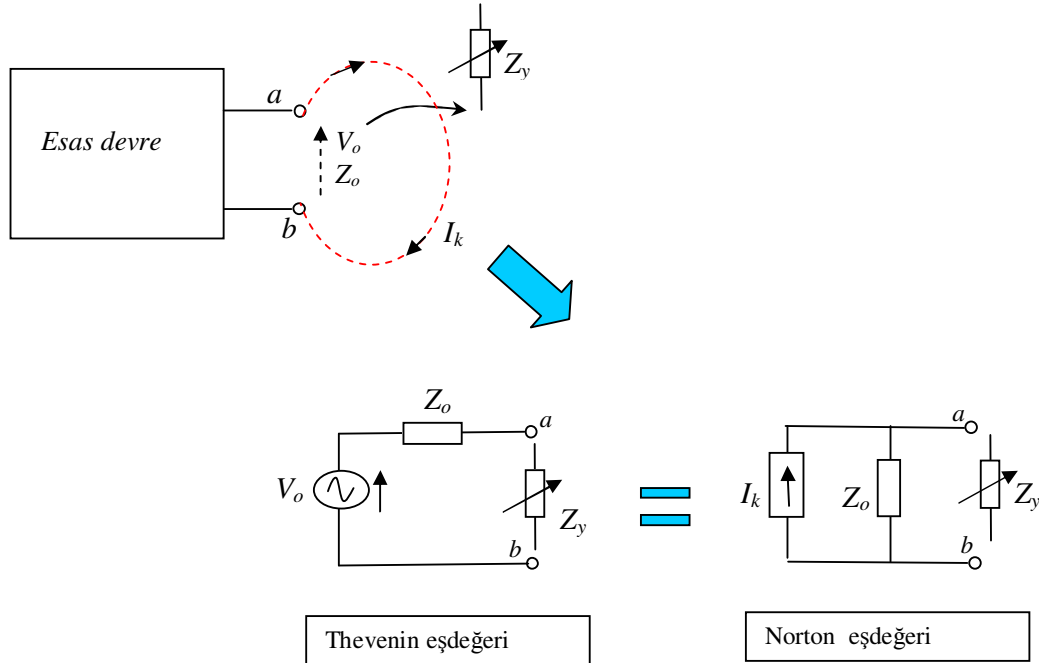
V_1 ve V_2 bulunduktan sonra, devredeki bazı elemanların akımları aşağıdaki prensip gösterimlerle hesaplanabilir. Bunun için ilgili düğüm gerilimi, yönü düğümünden akım çıkacak şekilde ilgili dalı besleyen hayali bir kaynak olarak düşünülür. Örnek devredeki bazı elemanlardan çekilen akımların analizleri için;



Akımlar negatif çıktığında, ön görülen yönün tersi yönde akımın aktığı kabul edilir.

9.3. Thevenin ve Norton Teoremleri

Karmaşık bir ac devresi, belirli bir uçlara göre basitleştirilmiş gerilim kaynaklı veya akım kaynaklı bir devreye dönüştürülebilir. Bu yöntem özellikle esas devrenin şekli aynı kalıp referans alınan uçlarda empedans veya bağlantı gurubu değişkenliklerinin olduğu durumlarda analiz basitliği sağlamaktadır. Gerilim kaynaklı basitleştirilmiş eşdeğer devre *Thevenin*, akım kaynaklı eşdeğer devre ise *Norton* eşdeğeri olarak tanımlanır. Gerek Thevenin gerekse Norton eşdeğerleri aynı sonuçları sağlar ve bu iki devre de birbirine dönüştürülebilir.



$V_o = a-b$ uçları açıkken bu uçlarındaki gerilim (Thevenin gerilimi)

$Z_o =$ açık $a-b$ uçlarına göre eşdeğer empedans (gerilim kaynakları kısa devre, akım kaynakları açık devre, fakat iç empedanslar işleme dahil)

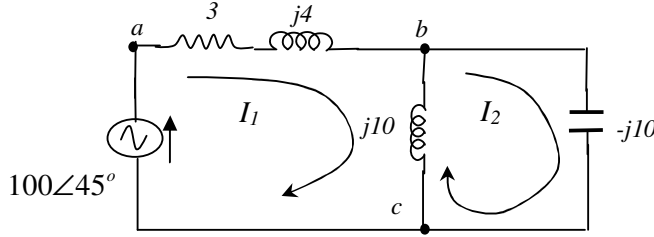
$I_k = a-b$ uçlarından geçebilecek kısa devre akımı (Norton akımı)

$$Z_o = \frac{V_o}{I_k}$$

10. Örnek Problemler Çevre, Düğüm , Thevenin ve Norton

Örnek:

Şekilde $V_{ab}=?$ ve $V_{bc}=?$



$$\begin{bmatrix} 3 + j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100\angle 45^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 3 + j14 & -j10 \\ -j10 & 0 \end{vmatrix} = 0 - (-j10)(-j10) = 100$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 100\angle 45^\circ & -j10 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = \frac{0}{100} = 0, \quad I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 + j14 & 100\angle 45^\circ \\ -j10 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = \frac{0 - (-j10) \cdot 100\angle 45^\circ}{100} = 10\angle 135^\circ$$

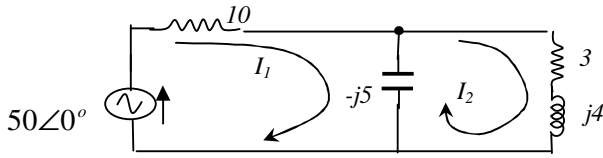
$$V_{ab} = I_1(3 + j4) = 0$$

$$V_{bc} = (I_1 - I_2)(j10) = -(10\angle 135^\circ)(10\angle 90^\circ) = (10\angle 135^\circ)(10\angle -90^\circ) = 100\angle 45^\circ$$

$$\text{Not: } -\underbrace{(100\angle 225^\circ)}_{-70.7-j70.7} = \underbrace{100\angle 45^\circ}_{70.7+j70.7}$$

Örnek:

Devrede gerilim kaynağının verdiği aktif gücü bulunuz. Devredeki dirençlerin harcadıkları güçleri ayrı ayrı bulunuz.



$$\begin{bmatrix} 10 - j5 & j5 \\ j5 & 3 - j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} 10 - j5 & j5 \\ j5 & 3 - j \end{vmatrix} = 50 - j25 = 55.90\angle -26.56^\circ$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 50\angle 0^\circ & j5 \\ 0 & 3 - j \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = \frac{150 - j50}{50 - j25} = \frac{158.11\angle -18.43^\circ}{55.90\angle -26.56^\circ} = 2.82\angle 8.12^\circ$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10 - j5 & 50\angle 0^\circ \\ j5 & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = \frac{250\angle -90^\circ}{55.90\angle -26.56^\circ} = 4.47\angle -63.44^\circ$$

Kaynağın gücü,

$$P = V.I_1 \cdot \cos(\theta) = (50)(2.82) \cos(8.12) = 139.58$$

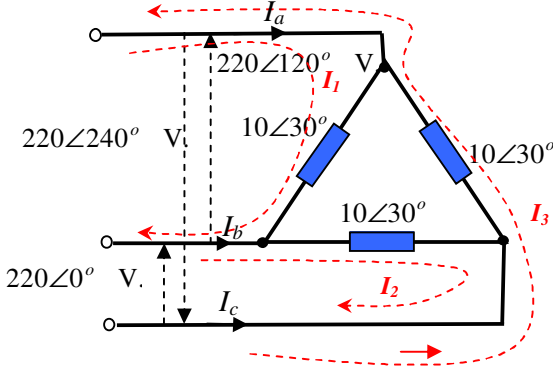
$$P_{10} = (I_1)^2 (10) = (2.82^2) \cdot (10) = 79.524$$

$$P_3 = (I_2)^2 (3) = (4.47)^2 (3) = 59.94$$

$$P_T = P_{10} + P_3 = 79.524 + 59.94 = 139.46 \cong P$$

Örnek:

Şekildeki ana hat akımlarını (I_a , I_b ve I_c) akımlarını bulunuz.



$$\underbrace{\begin{bmatrix} 10\angle 30^\circ & 0 & 0 \\ 0 & 10\angle 30^\circ & 0 \\ 0 & 0 & 10\angle 30^\circ \end{bmatrix}}_Z \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220\angle 120^\circ \\ 220\angle 0^\circ \\ 220\angle 240^\circ \end{bmatrix}$$

$$\Delta_Z = (10\angle 30^\circ) \cdot [(10\angle 30^\circ) \cdot (10\angle 30^\circ) - 0] = 1000\angle 90^\circ$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 220\angle 120^\circ & 0 & 0 \\ 220\angle 0^\circ & 10\angle 30^\circ & 0 \\ 220\angle 240^\circ & 0 & 10\angle 30^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = \frac{(220\angle 120^\circ)[(10\angle 30^\circ) \cdot (10\angle 30^\circ) - 0]}{1000\angle 90^\circ} = 22\angle 90^\circ$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} 10\angle 30^\circ & 220\angle 120^\circ & 0 \\ 0 & 220\angle 0^\circ & 0 \\ 0 & 220\angle 240^\circ & 10\angle 30^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = \frac{(220\angle 0^\circ)[(10\angle 30^\circ) \cdot (10\angle 30^\circ) - 0]}{1000\angle 90^\circ} = 22\angle -30^\circ$$

$$I_3 = \frac{\begin{vmatrix} 10\angle 30^\circ & 0 & 220\angle 120^\circ \\ 0 & 10\angle 30^\circ & 220\angle 0^\circ \\ 0 & 0 & 220\angle 240^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = \frac{(220\angle 240^\circ)[(10\angle 30^\circ) \cdot (10\angle 30^\circ) - 0]}{1000\angle 90^\circ} = 22\angle 210^\circ$$

$$I_a = I_1 - I_3 = (22\angle 90^\circ) - (22\angle 210^\circ) = j22 - (-19.05 - j11) = 19.05 + j33 = 38.1\angle 60^\circ$$

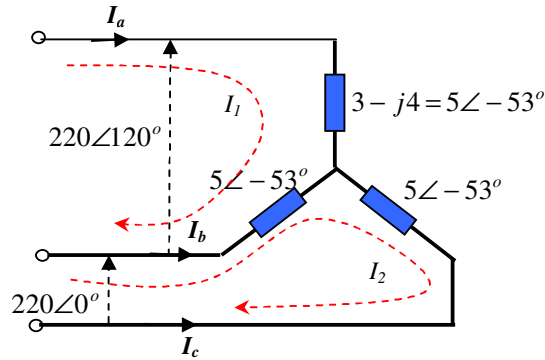
$$I_b = I_2 - I_1 = (22\angle -30^\circ) - (22\angle 90^\circ) = \dots = 38.1\angle -60^\circ$$

$$I_c = I_3 - I_2 = (22\angle 210^\circ) - (22\angle -30^\circ) = \dots = -38.1\angle 0^\circ = 38.1\angle 180^\circ$$

$$I_1 = I_{faz}, \quad I_a = I_{hat} \quad \text{ve} \quad I_a / I_1 = 1.73 = \sqrt{3}, \quad \Delta \text{ bağılı hat -faz bağıntısı} \dots$$

Örnek:

Şekildeki 3 fazlı yıldız devrede, hat akımlarını (I_a , I_b ve I_c) bulunuz.



$$\begin{bmatrix} (6-j8) & -(3-j4) \\ -(3-j4) & (6-j8) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 220\angle 120^\circ \\ 220\angle 0^\circ \end{bmatrix}$$

$$\Delta_Z = \begin{vmatrix} (6-j8) & -(3-j4) \\ -(3-j4) & (6-j8) \end{vmatrix} = 75\angle -106^\circ$$

$$I_1 = \frac{\begin{vmatrix} 220\angle 120^\circ & -(3-j4) \\ 220\angle 0^\circ & (6-j8) \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = \frac{(220\angle 120^\circ) \cdot (10\angle -53^\circ) - (220\angle 0^\circ) \cdot (-5\angle -53^\circ)}{75\angle -106^\circ} = 25.4\angle 143.1^\circ$$

$$I_2 = \frac{\begin{vmatrix} (6-j8) & 220\angle 120^\circ \\ -(3-j4) & 220\angle 0^\circ \end{vmatrix}}{\Delta_Z} = \frac{(10\angle -53^\circ) \cdot (220\angle 0^\circ) - (-5\angle -53^\circ) \cdot 220\angle 120^\circ}{75\angle -106^\circ} = 25.4\angle 83.1^\circ$$

$$I_a = I_1 = 25.4\angle 143.1^\circ$$

$$I_c = -I_2 = -25.4\angle 83.1^\circ$$

$$I_b = I_2 - I_1 = (25.4\angle 83.1^\circ) - (25.4\angle 143.1^\circ) = (3.05 + j25.2) - (-20.3 + j15.2) = 25.4\angle 23.18^\circ$$

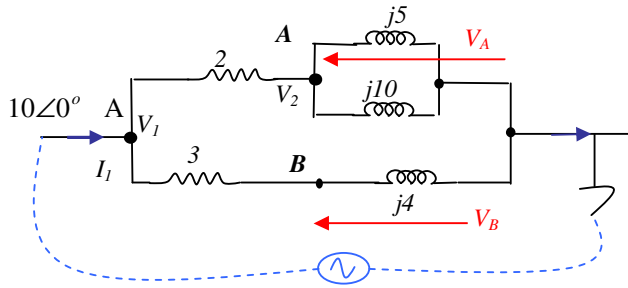
$$|I_a| = |I_b| = |I_c|, \quad V_{1faz} = (5)(25.4) = 127 \text{ V.}$$

$$\frac{V_{hat}}{V_{1faz}} = \frac{220}{127} = 1.73 = \sqrt{3}$$

Yıldız bağlı faz-hat gerilim bağıntısı sonucudur.....

Örnek:

Şekildeki devrede, V_{AB} gerilimini düğüm gerilimleri yöntemiyle bulunuz.



$$\underbrace{\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3+j4}\right) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{j10}\right) \end{bmatrix}}_{\Delta_Y} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10\angle 0^\circ \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Delta_Y = \begin{vmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3+j4}\right) & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{j10}\right) \end{vmatrix} = -j0.26 = 0.26\angle -90^\circ$$

$$V_1 = \frac{\begin{vmatrix} 10\angle 0^\circ & -\frac{1}{2} \\ 0 & \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{j5} + \frac{1}{j10}\right) \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{5.80\angle -31^\circ}{0.26\angle -90^\circ} = 22.3\angle 59^\circ$$

$$V_2 = \frac{\begin{vmatrix} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3+j4}\right) & 10\angle 0^\circ \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix}}{\Delta_Y} = \frac{5\angle 0^\circ}{0.26\angle -90^\circ} = 19.23\angle 90^\circ$$

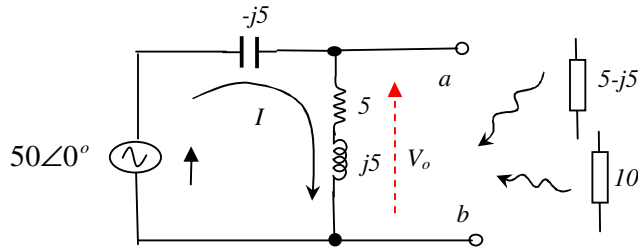
$$V_A = V_2 = 19.23\angle 90^\circ$$

$$V_B = I_B(j4) = \frac{V_1}{3+j4}(j4) = 17.84\angle 95.9^\circ$$

$$V_{AB} = V_A - V_B = (19.23\angle 90^\circ) - (17.84\angle 95.9^\circ) = j19.23 - (-1.83 + j17.74) = 1.83 + j1.49 = 2.35\angle 39.15^\circ$$

Örnek:

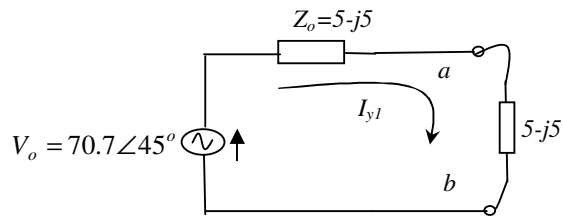
Şekildeki a-b uçlarına sırasıyla $(5-j5)$ ve 10 ohmluk ohmik direnç bağlanıyor. Bu empedanslardaki aktif güçleri Thevenin yöntemiyle bulunuz.



$$V_o = V_{ab} = I(5 + j5)$$

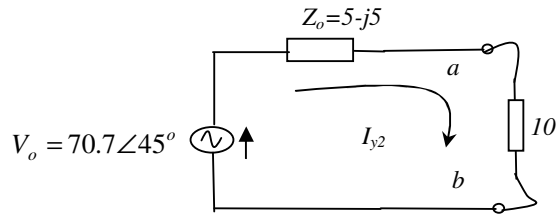
$$I = \frac{50\angle 0^\circ}{-j5 + 5 + j5} = 10 \quad V_o = 10(5 + j5) = 70.7\angle 45^\circ$$

$$Z_o = \frac{(-j5)(5 + j5)}{5 + j5 - j5} = 5 - j5$$



$$I_{y1} = \frac{70.7\angle 45^\circ}{10 - j10} = 5$$

$$P_{y1} = (I_{y1})^2 (5) = (5)^2 (5) = 125$$

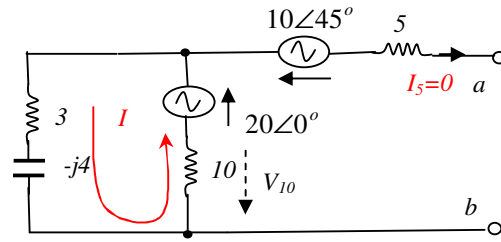


$$I_{y2} = \frac{70.7\angle 45^\circ}{15 - j5} = 4.47\angle 63.45^\circ$$

$$P_{y2} = (I_{y2})^2 (10) = (4.47)^2 (10) \cong 200$$

Örnek:

Aşağıdaki devrenin a-b uçlarına göre olan Thevenin eşdeğerini bulunuz.

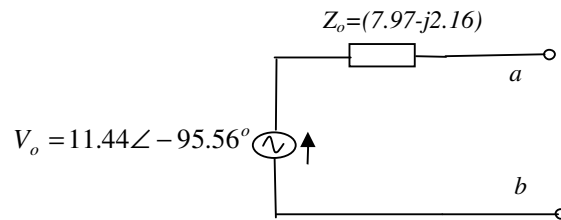


$$I = \frac{20\angle 0^\circ}{10 + 3 - j4} = 1.47\angle 17.1^\circ$$

$$V_{10} = (I)(10) = (1.47\angle 17.1^\circ)(10) = 14.7\angle 17.1^\circ$$

$$V_o = V_{ab} = 20\angle 0^\circ - 10\angle 45^\circ - V_{10} = 20 - 7.07 - j7.07 - 14.05 - j4.32 = -1.11 - j11.39 = 11.44\angle -95.56^\circ$$

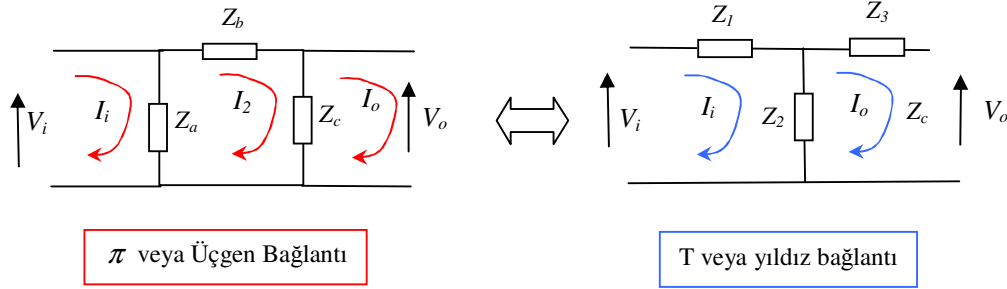
$$Z_o = Z_{ab} = 5 + \frac{(3 - j4)(10)}{3 - j4 + 10} = 7.97 - j2.16$$



11. Yıldız-Üçgen dönüşümü ve Diğer Analiz Yöntemleri

10.1. Yıldız- Üçgen Dönüşümü (T- π dönüşümü)

Yıldız ve üçgen bağlantılar arasında dönüşüm yapılabilir.



Bu iki bağlantı grubunun birbirinin karşılığı olabilmesi için, her iki devrenin giriş, çıkış ve transfer empedansları birbirine eşit olmalıdır.

Üçgen Devrede:

$$\begin{bmatrix} Z_a & -Z_a & 0 \\ -Z_a & (Z_a + Z_b + Z_c) & -Z_c \\ 0 & -Z_c & Z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i \\ I_2 \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ 0 \\ -V_o \end{bmatrix}$$

$$Z_{giriş} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}} = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b}$$

$$Z_{çıkış} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{33}} = \frac{Z_b Z_c}{Z_b + Z_c}$$

$$Z_{trans} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{13}} = Z_b$$

Yıldız Devrede:

$$\begin{bmatrix} (Z_1 + Z_2) & -Z_2 \\ -Z_2 & (Z_1 + Z_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_i \\ I_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ -V_o \end{bmatrix}$$

$$Z_{giris} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{11}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3}, \quad Z_{çıkış} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{22}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2},$$

$$Z_{trans} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{12}} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2}$$

İki devrenin aynı empedans terimleri birbirine eşitlenirse,

$$\frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3} \quad (1)$$

$$\frac{Z_b Z_c}{Z_b + Z_c} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1 + Z_2} \quad (2)$$

$$Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2} \quad (3)$$

(3) nolu ifade, (1) ve (2) 'de yerine yazılıp, Z_a ve Z_c terimleri tanımlanır.

$$Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3} \quad (4)$$

$$Z_c = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1} \quad (5)$$

Bu ifadeler verilen Z_1, Z_2 ve Z_3 'e göre Z_a, Z_b ve Z_c ifadelerini verir.

Z_a, Z_b ve Z_c ifadeleri toplanıp ters çevrilirse,

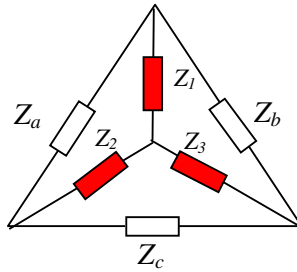
$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_a + Z_b + Z_c} &= \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)(Z_1 Z_2) + (Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)(Z_1 Z_3) + (Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)(Z_2 Z_3)} \\ &= \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3).(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)} = \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)^2} \end{aligned} \quad (6)$$

(6)'nın her iki tarafı $(Z_a Z_b)$ ile çarpılıp ve eşitliğin sağ tarafı bunların (3) ve (4) deki karşılıkları yazıldığında,

$$\begin{aligned} \frac{1}{Z_a + Z_b + Z_c} (Z_a Z_b) &= \frac{Z_1 Z_2 Z_3}{(Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3)^2} \cdot \underbrace{\left(\frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3} \right)}_{Z_a} \underbrace{\left(\frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2} \right)}_{Z_b} \\ Z_1 &= \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c} \end{aligned}$$

bulunur. Benzer yöntemle $(Z_a Z_c)$ ile Z_2 , ve $(Z_b Z_c)$ ile Z_3 bulunur....

Böylece, üçgenden yıldız, yıldızdan üçgene dönüşüm bağıntıları tanımlanmış olur. Bunların örnek şekil üzerindeki sonuç durumları aşağıdadır.



Yıldızdan- Üçgene dönüşüm:

$$Z_a = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_3} \quad Z_b = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_2} \quad Z_c = \frac{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}{Z_1}$$

Üçgenden-Yıldız dönüşüm:

$$Z_1 = \frac{Z_a Z_b}{Z_a + Z_b + Z_c}, \quad Z_2 = \frac{Z_a Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}, \quad Z_3 = \frac{Z_b Z_c}{Z_a + Z_b + Z_c}$$

10.2. Süperpozisyon Teoremi

Farklı sayıdaki gözlü devrelerde, daha önce belirtildiği gibi akımlar devredeki kaynak gerilimlerine bağlı olup az ya da çok bu gerilimlerden etkilenir. Örneğin herhangi bir çevredeki akım ifadesi, matris yöntemi ile hesaplanırken devredeki bütün kaynakların bulunduğu terimleri içerir ve bunlarla ilgili transfer empedanslarının bir sonucudur. Her terim ilgili kaynağın akım oluşumundaki tek başına olan etkisini belirtir. Başka deyimle herhangi bir akım, devredeki bütün kaynakların devreyi tek başına besleme durumlarındaki katkılarının bir bileşkesidir.

$$I_1 = V_1 \frac{\Delta_{11}}{\Delta_Z} + V_2 \frac{\Delta_{21}}{\Delta_Z} + \dots + V_n \frac{\Delta_{n1}}{\Delta_Z}$$

10.3. Karşıtlık Teoremi

İki yönlü tek kaynaktan oluşan bir devrede, uyarımın cevaba oranı, uyarım ile cevap yer değişirse değişmez. Çünkü giriş ve çıkış için iki yönlü sistem olduğundan transfer empedansı aynıdır.

V_s kaynak, I_r akımı için transfer empedansı,

$$I_r = V_s \frac{\Delta_{sr}}{\Delta_Z}$$

$$\frac{V_s}{I_r} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{sr}}$$

Uyarımla cevap yer değiştirilirse, V_r kaynak olur, I_s akım olur. Bu yeni durumda transfer empedansı için,

$$I_s = V_r \frac{\Delta_{rs}}{\Delta_Z}$$

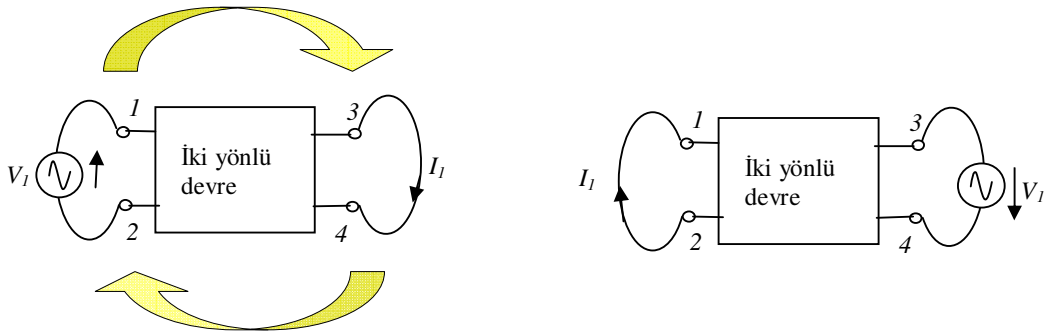
$$\frac{V_r}{I_s} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rs}}$$

Her iki durum için transfer empedansları birbirine eşittir.

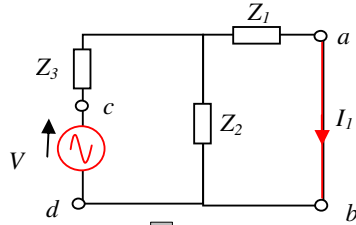
$$\frac{V_s}{I_r} = \frac{V_r}{I_s}$$

$$\frac{\Delta_Z}{\Delta_{sr}} = \frac{\Delta_Z}{\Delta_{rs}} \quad \Delta_{rs} = \Delta_{sr}$$

Bu teoreme ilişkin prensip şema aşağıdadır.

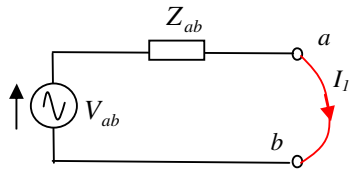


Aşağıdaki devrede, kaynak ve akım yer değiştiğinde a-b ve c-d Thevenin eşdeğerlerinin denk olup akımların eşit olduğunu gösteriniz.



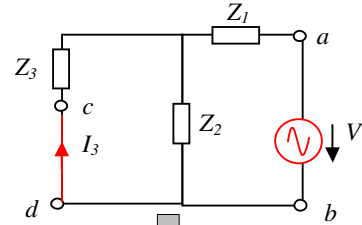
$$Z_{ab} = \frac{Z_3 Z_2}{Z_3 + Z_2} + Z_1$$

$$V_{ab} = V \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3}$$



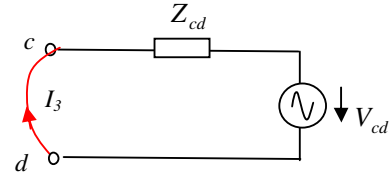
$$I_1 = \frac{V_{ab}}{Z_{ab}} = \left(V \cdot \frac{Z_2}{Z_2 + Z_3} \right) \cdot \left(\frac{Z_2 + Z_3}{Z_3 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2} \right)$$

$$I_1 = \frac{V \cdot Z_2}{Z_3 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2}$$



$$Z_{cd} = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2} + Z_3$$

$$V_{cd} = V \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1}$$



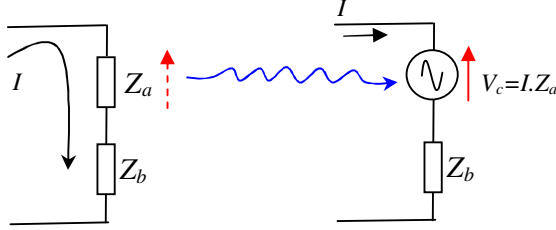
$$I_3 = \frac{V_{cd}}{Z_{cd}} = \left(V \cdot \frac{Z_2}{Z_2 + Z_1} \right) \cdot \left(\frac{Z_2 + Z_1}{Z_3 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2} \right)$$

$$I_3 = \frac{V \cdot Z_2}{Z_3 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_1 Z_2}$$

Akımlar eşit değerde
aynı

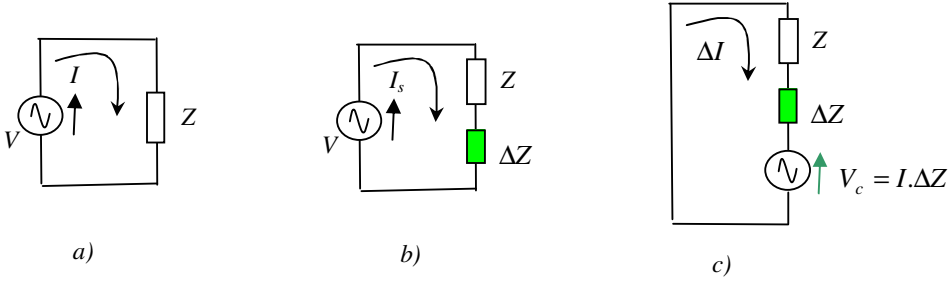
10.4. Kompanzasyon Teoremi

İçinden bir I akımı geçen devredeki bir Z empedansı, değeri $(I.Z)$ olan bir dengeleyici kompanzasyon emk olarak gösterilebilir. Bu *kompanzasyon emk* yönü sürüş akımına terstir.



Devredeki herhangi bir değişiklik I akımını etkilerse, kompanzasyon kaynağı I 'ya bağlı olduğundan buna göre değiştirilmelidir. V_c kompanzasyon kaynağı bir bağımlı kaynak olarak tanımlanır.

Bu teorem, bir devre ögesindeki empedans değiştiğinde, bu ögedeki akım ve gerilimin bulunmasında faydalı olmaktadır.



Yukarıdaki devrelerde,

a) durumunda V kaynağı $I = V/Z$ değerinde akım oluşturur.

b) durumunda aynı V beslemesinde empedans $Z + \Delta Z$ 'e değişmiştir. Bu durumda akım $I_s = V / (Z + \Delta Z)$ 'dir.

c) durumunda ise esas kaynak sıfırlanıp, $Z + \Delta Z$ içeren devreye bir kompanzasyon gerilimi uygulanır. Devreden ΔI akar. Bu ΔI , ΔZ 'lik empedans değişimi nedeniyle olan akımdaki değişimdir.

İspat:

$$\Delta I = I_s - I = \frac{V}{\Delta Z + Z} - \frac{V}{Z} = \frac{V.Z - V.Z - V.\Delta Z}{Z.(Z + \Delta Z)} = \underbrace{\left(-\frac{V}{Z}\right)}_{-I} \frac{\Delta Z}{(Z + \Delta Z)} = \frac{\overbrace{-I.\Delta Z}^{-V_c}}{(Z + \Delta Z)} = \frac{-V_c}{Z + \Delta Z}$$

veya,

$$V - V = 0$$

$$0 = I.Z - I_s.(Z + \Delta Z) = I.Z - \underbrace{(I + \Delta I)}_{I_s} (Z + \Delta Z) = I.Z - I.Z - I.\Delta Z - (\Delta I).Z - (\Delta I)(\Delta Z)$$

$$I.\Delta Z = -\Delta I(Z + \Delta Z) \quad \text{ise} \quad V_c = -\Delta I(Z + \Delta Z)$$

Örnek:

Şekildeki devrede $3+j4$ olan empedans $(5+j5)$ ' e değişiyor. Akımdaki değişikliği bulup, kompanzasyon teoremiyle gösteriniz.

$$\Delta Z = (5 + j5) - (3 + j4) = 2 + j$$

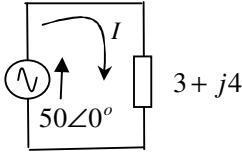
$$I = \frac{50 \angle 0^\circ}{3 + j4} = 10 \angle -53^\circ$$

$$I_s = \frac{50 \angle 0^\circ}{5 + j5} = 7.07 \angle -45^\circ$$

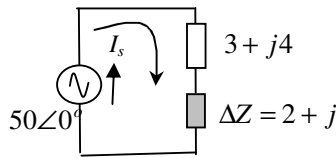
$$\Delta I = I_s - I = (7.07 \angle -45^\circ) - 10 \angle -53^\circ$$

$$= 5 - j5 - (6 - j8) = -1 + j3 = 3.16 \angle 108.43^\circ$$

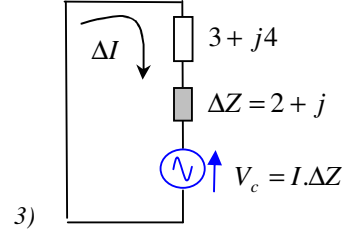
$$V_c = I \cdot (\Delta Z) = (10 \angle -53^\circ) \cdot \underbrace{(2 + j)}_{2.23 \angle 26.56^\circ} = 22.3 \angle -26.44^\circ$$



1)



2)

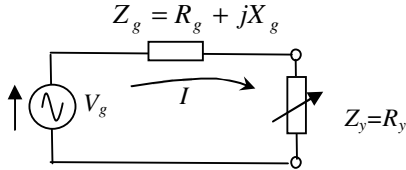


3)

$$\Delta I = -\frac{V_c}{Z + \Delta Z} = -\frac{22.3 \angle -26.44^\circ}{(3 + j4) + (2 + j)} = -(3.16 \angle -71.5^\circ) = 3.16 \angle 108.43^\circ$$

10.5. Maksimum Güç Transferi Teoremi

Bir AC kaynağının bir yüke aktarabileceği maksimum güç, yükün empedans tipi ve değeriyle ilgili olarak değişir. Kaynaklar çoğunlukla bobin sargılı generatörler ve bağımlı kaynak olarak trafolardan oluştukları için iç empedans endüktif karakterlidir.

1.durum: Ohmik dirençli yük

$$I = \frac{V_g}{\sqrt{(R_g + R_y)^2 + (X_g)^2}}$$

$$P = I^2 R_y = \frac{V_g^2 \cdot R_y}{(R_g + R_y)^2 + (X_g)^2}$$

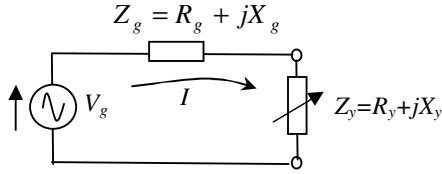
$$\frac{dP}{dR_y} = 0 \quad (\text{maksimum guc kosullari})$$

$$\frac{dP}{dR_y} = \frac{d}{dR_y} \left[\frac{V_g^2 \cdot R_y}{(R_g + R_y)^2 + (X_g)^2} \right] = V_g^2 \left[\frac{[(R_g + R_y)^2 + X_g^2] - 2 \cdot (R_g + R_y) \cdot 1 \cdot R_y}{[(R_g + R_y)^2 + (X_g)^2]^2} \right] = 0$$

$$R_g^2 + 2R_g R_y + R_y^2 + X_g^2 = 2R_g R_y + 2R_y^2 \quad \text{ise} \quad R_y = \sqrt{R_g^2 + X_g^2} = |Z_g|$$

Kaynak iç empedansının reaktif bileşeni $X_g = 0$ olursa $R_y = R_g$ olur ki bu da bilinen dc devrelerdeki maksimum güç transferi koşullarına karşılık gelir.

2.durum: değişken direnç ,değişken reaktanslı yük



$$I = \frac{V_g}{\sqrt{(R_g + R_y)^2 + (X_g + X_y)^2}}$$

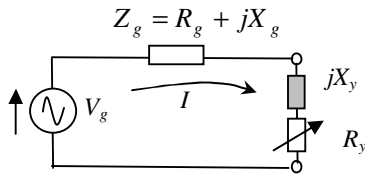
$$P = I^2 R_y = \frac{V_g^2 R_y}{(R_g + R_y)^2 + (X_g + X_y)^2}$$

İlkin R_y sabit tutulduğu kabul edilip, yukarıdaki P ifadesinde payda küçülürse P artar. Bu durumda $X_y = -X_g$ olmalıdır.

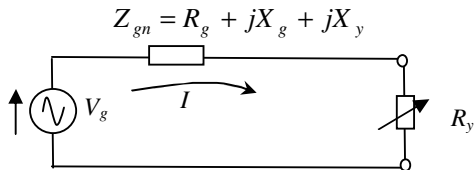
Diğer yandan R_y değişken olarak düşünüldüğünde, 1. durum koşullarındaki iç empedansın ohmik dirençten oluştuğu durum ortaya çıkar . Bu aşama için $R_y = R_g$ olmalıdır.

Böylece maksimum güç transferi için yük empedansı,
 $Z_y = R_g - jX_g = Z_g^*$ olmalıdır.

3.durum: Sabit reaktanslı, değişken dirençli yük



Böyle devrelerde, sabit olan yük reaktansı (jX_y) seri iç empedans içine dahil edilir. Devrenin yeni şekli aşağıdadır.



Bu yeni devre, 1. duruma benzer. Maksimum güç transferi için olması gereken R_y aşağıdadır.

$$R_y = \sqrt{R_g^2 + (X_g + X_y)^2} \quad R_y = |Z_{gn}|$$

11. Magnetik Kuplaj Devreler

Elektrik devrelerinde elemanlar arasında manyetik yol ile de etkileşim söz konusudur. Aralarında doğrudan bir bağlantı olmaksızın bobinler arasında manyetik bir bağlantı ve bunun sonucunda elektriksel etkileşim olabilir. Bobinden geçen akımlar AC devreleri gibi devrelerde değişirse değişken manyetik akılar üretilir. Değişken akı, akım taşıyan bir bobini veya başka bir bobini etkilemesiyle oluşan indükleme olayları elemanlar arası manyetik bağlantıların (kuplaj) temel nedenini oluşturur.

Öz endüktans (L):

Bir bobinde akım değişirse onun ürettiği manyetik akı da değişir. Bu akı sargıları keserek bir *emk* endükler. Sistemin manyetik geçirgenliği μ değişmez ise *emk* gerilimi akıdaki değişme hızıyla orantılıdır.

$$e_z = N \cdot \frac{d\phi}{dt} = L \frac{di}{dt}$$

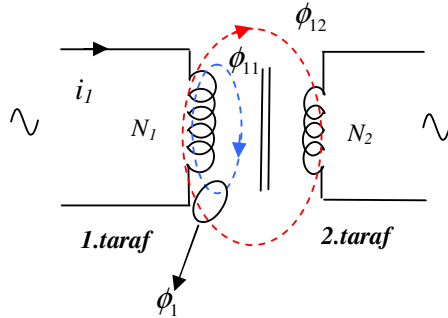
e_z = indüklenen emk, N = sarım sayısı, ϕ =akı ve $L = N$ sarımındaki akıdaki değişimin karşılığı olan emk üretimi için akıdaki değişme çarpanı olarak öz endükleme katsayısıdır. Bir bobin sisteminin öz endüklemi aşağıda ifadelendirilmiştir.

$$L = \frac{N^2 \mu A}{l}$$

Burada, μ = ortamın manyetik geçirgenliği (ortam hava ise $\mu_o = 4\pi(10^{-7})$ H./m), A akı yolunun kesit alanı (m^2), l = akı yolu uzunluğu (m).

Karşılıklı Endüktans (M):

Karşılıklı endüktans, bir bobinde, bunu magnetik olarak etkileyen başka bir bobindeki akımın neden olduğu indükleme katsayısıdır.



ϕ_1 = 1. tarafta üretilen toplam akı

ϕ_{11} = 1. tarafta üretilen 1.tarafı kesen akı (sızıntı)

ϕ_{12} = 1. tarafta üretilen 2. tarafı kesen akı

1.taraf için:

$$\phi_1 = \phi_{11} + \phi_{12}$$

$$e_1 = N_1 \cdot \frac{d\phi_1}{dt} = L_1 \frac{di_1}{dt}$$

2.taraf için:

$$e_2 = N_2 \frac{d\phi_{12}}{dt} = M \frac{di_1}{dt}$$

$$M = N_2 \frac{d\phi_{12}}{di_1}$$

Not: Bir bobinin öz endükleme, üzerindeki toplam akıyla gerçekleşir.

Karşılıklı etkileşim iki yönlüdür. 2. taraftaki bobinden i_2 akımı geçerse benzer ifadeler 1. taraf bobini için yapılır. Sonuçta sistem karşılıklı indüklemeler ile bir dengede buluşur.

$$M = N_1 \frac{d\phi_{21}}{di_2} \quad \phi_{21} = 2. \text{ tarafta üretilip } 1. \text{ tarafı etkileyen akı}$$

Bobinler demir ve alaşımları gibi bir nüve üzerinde ise $\phi-i$ ilişkisi doğrusal değildir. Bu nedenle M ifadelerinde akı ve akım gösterimleri diferansiyel olarak gösterilir. Ortam hava ise $\phi-i$ ilişkisi doğrusaldır. Bu durumda ifadelerde akı ve akım oranı sabit görülür.

Etkileşim Katsayısı (k):

Bir bobinden diğerine geçen akı, aradaki uzaklığa, eksenlerin birbirine göre olan durumlarına ve ortamın magnetik geçirgenliğine bağlıdır. Transfer olan akının toplam akıya olan oranı *etkileşim katsayısı* (k)'dır.

$$k = \frac{\phi_{12}}{\phi_1} = \frac{\phi_{21}}{\phi_2}$$

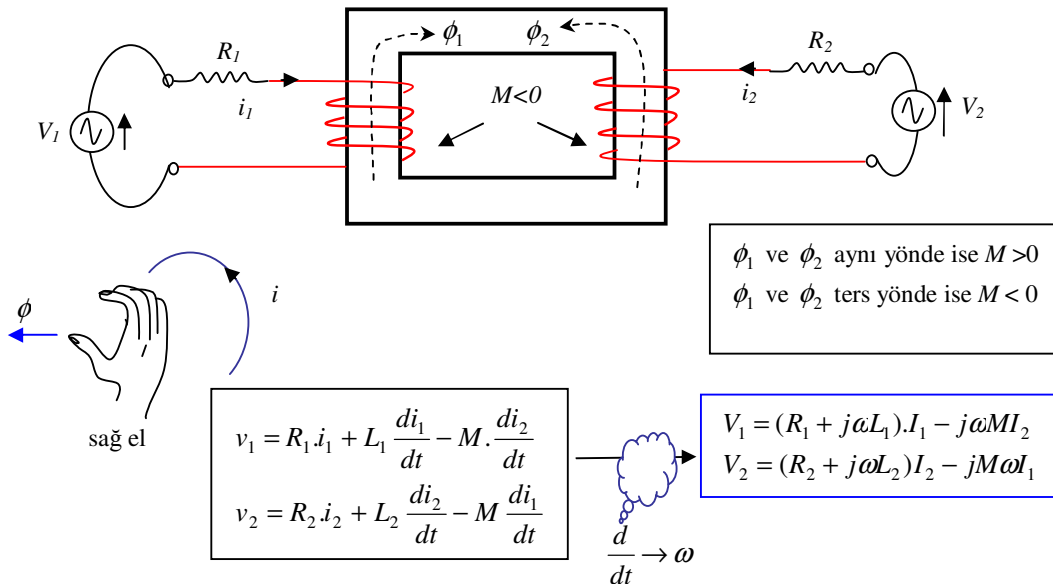
$\phi_{12} \leq \phi_1$ ve $\phi_{21} \leq \phi_2$ olduğundan k en fazla 1 değerini alır.

$$M^2 = M.M = (N_2 \frac{\phi_{12}}{i_1}).(N_1 \frac{\phi_{21}}{i_2}) = (N_2 \frac{k.\phi_1}{i_1}).(N_1 \frac{k.\phi_2}{i_2}) = k^2 (N_1 \frac{\phi_1}{i_1}).(N_2 \frac{\phi_2}{i_2}) = k^2 L_1 L_2$$

$$M = k\sqrt{L_1 L_2}$$

Birbirini Magnetik yolla etkileyen devreler:

Birbirini magnetik yolla etkileyen bobinler arasında elektriksel bir kontak bağlantısı olsun veya olmasın birbirinin elektriksel değerlerini etkiler. Şekil ve bağıntılar aşağıdadır..

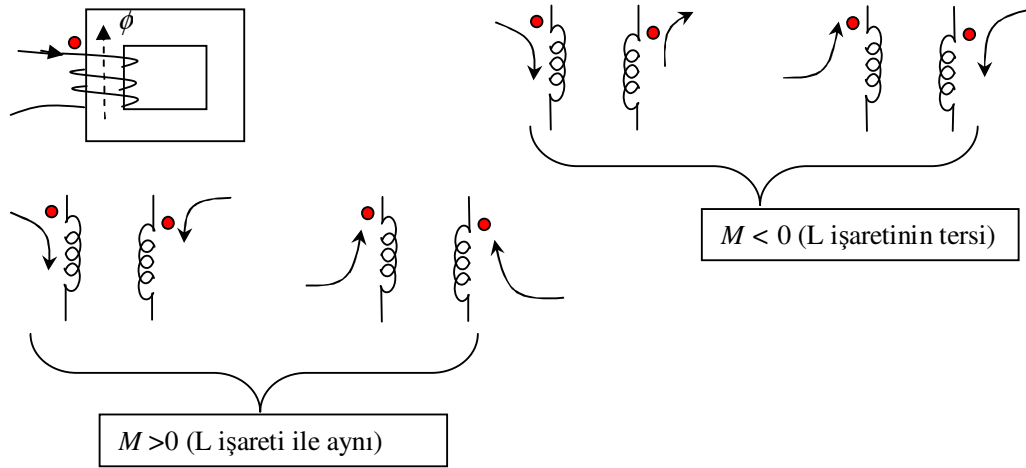


M'nün İşareti- Nokta Kuralı:

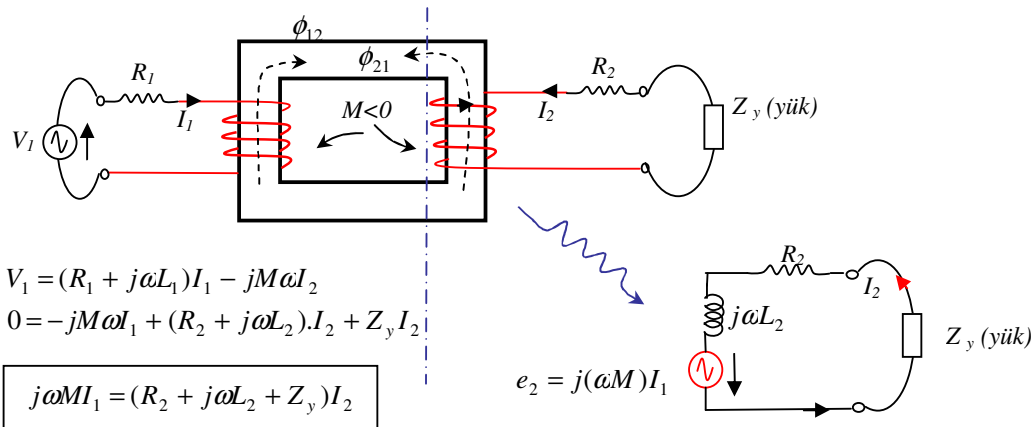
Karşılıklı etkileşen bobinlerde, akı yönleri yerine akımların girdiği kenarlar bir işaretlerle belirtilir. Bobinlerin aynı yönde sarıldığı kabul edilerek akımın giriş yönlerine göre nokta kuralı ile M işareti belirlenir. Örneğin iki bobin için, noktanın bulunduğu bobin kenarına göre akımların her ikisi de giriyor veya çıkıyorsa M işareti ilgili bobin L 'si ile aynı işaretli yani (+)'dır. Biri giriyor diğeri çıkıyorsa M işareti ilgili L ile ters işaretli olarak yani (-)'dir.

Etkileşen ikiden fazla bobin varsa, M 'nün işareti için, her bobin diğer bobinlerle karşılıklı olarak düşünülüp, her çift bobin için bir M tanımlanır ve bu kural çerçevesinde M işareti ilgili L 'nin işaretine göre (+) veya (-) alınır.

Örnek yönler:

**Doğal Akım (İndükleme Akımı):**

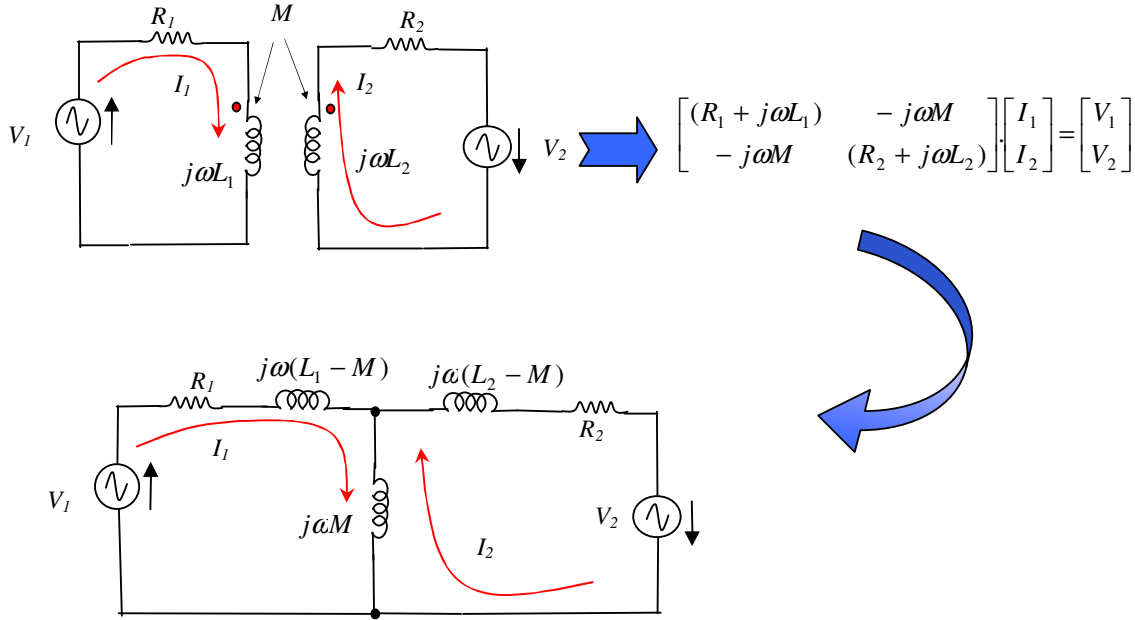
Magnetik sistemde sadece bir taraftan enerji beslemesi yapıp, indüksiyon yolu ile diğer tarafta gerilim indüklenir ve bu gerilim bir yük ile kapalı çevrim oluşturulduğunda bir I_2 akım geçirir. *Lens yasasına* göre, indüklenen gerilim öyle bir yöndedir ki devre tamamlanıp geçireceği akım, besleme tarafında üretilen akımın neden olduğu akıya *daima ters* şekilde ikinci tarafta bir akı üretir. Böyle sistemlerde, sargı yönü ne olursa olsun M *daima negatiftir*. Trafo buna örnektir.



Doğal akımlı bir indükleme sisteminde, beslemenin yapılmadığı taraftaki akım artarsa (-ki bu yükün değerine göre değişir, kısa devrede en yüksek değerde), bunun oluşturduğu ters akı besleme tarafından oluşan akıyı azaltır. Toplam akı azaldığında besleme tarafı emk'sı azalır ve sonuçta aynı V besleme gerilimi altında birinci taraf akımında artış olur. Benzer beklenti yukarıdaki besleme tarafı için verilen gerilim bağıntılarından da anlaşılabilir. Bu durum, bir trafo yüklendiğinde ikinci taraf akımı artışı yanında besleme tarafı akımının da arttığını, trafo boşta çalışırken neden şebekeden çok küçük akım çekebileceğini açıklar.

Magnetik Etkileşimli Devrenin Elektriksel Bağlantı Eşdeğeri:

Magnetik etkileşimli fakat elektriksel bağlantılı olmayan ayrık devre sistemlerinde, her sistem için gerilim denklemleri ifade edildiğinde bu bağıntılar arasında karşılıklı endüktanslı (M) terimler ortak elemanlar olur. Bu karşılıklı endüktans M 'den kaynaklanan reaktanslar ilgili çevreler arasında ortak empedans halinde gösterilir. İlgili çevre empedansları gerilim denklemlerinin ön gördüğü şekilde düzenlenir. Aşağıda örnek bir durum verilmektedir.



Yukarıdaki örnek devre gibi devrelerde, belirli bir çevre için, karşılıklı endüktanslı gerilim düşümü terimi kendi çevre akımıyla değil başka çevre akımlarıyla oluşur. İlgili çevre akımı da başka çevrede böyle bir gerilim oluşturacaktır. Bu nedenle ilgili çevre akımının kendi çevresinde M çarpanlı gerilim düşümü olmaması ve aynı zamanda çevre akımları kurallarıyla da uyumlu olması için, L özendüktans terimlerinden M terimleri çıkarılmış şekilde $j\omega(L-M)$ reaktans elemanları ifade edilir ($j\omega(L-M)$ gibi).

$$V_1 = I_1 R_1 + j(\omega L_1) I_1 - \underbrace{j(\omega M) I_1 + j(\omega M) I_1}_0 - j(\omega M) I_2$$

$$V_2 = I_2 R_2 + j(\omega L_2) I_2 - \underbrace{j(\omega M) I_2 + j(\omega M) I_2}_0 - j(\omega M) I_1$$

Aynı akımı taşıyan bobinlerdeki durum:

