

Diverjans teoremi

Bir vektör alanının Diverjansı birim hacimden dışa doğru olan net (toplam) akıdır.

Hacim dışından kapalı bir yüzeyden dışarı çıkan net akı varsa kapalı alanda bir kaynak vardır ve diverjans bu kaynağın ölçüsünü verir.

Diverjans Teoremi, Gauss Teoremi, Green teoremi 1

$$\int_V \nabla \cdot \hat{A} \, dV = \oint_S \hat{A} \cdot d\vec{s} \quad \nabla \cdot \hat{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oint \hat{A} \cdot d\vec{s}}{\Delta V}$$



*Kaynaktan çıkan net akı kaynağın dışındaki kapalı bir yüzeyden çıkan toplam akıya eşittir.

Kartezyen koordinat sisteminde

$$d\vec{s} = (\text{sonsuz küçük alan elemanı}) = dx dy, dx dz, dy dz$$

$$dV = dx dy dz$$

Kaynaktan çıkan akının doğrusal olması gerekir (Diverjans hesaplanabilmesi için)

Rotasyoneli:

$$\nabla \times \hat{A}$$

del $\rightarrow$ vektörel

$$\nabla = \hat{x} \frac{d}{dx} + \hat{y} \frac{d}{dy} + \hat{z} \frac{d}{dz}$$

$$\hat{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

$$\nabla \times \vec{B} = \vec{E}$$

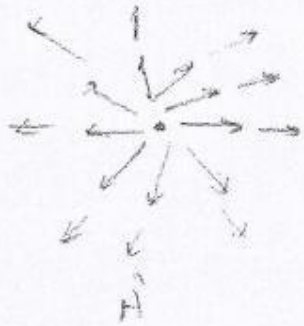
Sonucu sınav için öğrenmesi lazım.

Doğrusal incross yapımı = 0. Rotasyoneli = 0 çıkar.

Aki oluşturan kaynağa olduğu gibi diğer bir de kaynağa
 diğer oluşturan kaynağa karşı kaynağa dokunmadan yada
 kuanton bir şekilde aynı oluşturmaya



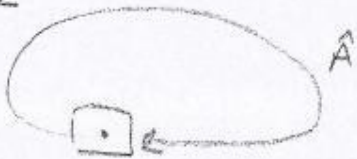
$\nabla \times \hat{A}$, belirli nokta etrafında $\hat{A}$ vektörel alanının ne kadar
 kuantonun bir ölçüsüdür. (Bu da kuantonun büyüklüğüdür)



kuantondur 0
 $\nabla \times \hat{A} = \nabla \times \hat{B} = \nabla \times \hat{C} = 0$

Kuantonun fiziksel anlamı vektörel alanı birer birer olarak fiziksel
 ifade edilebilir.

* Eğer $\hat{A}$ bir objeye etkiyen kuvvet ise $\hat{A}$ 'nin kuantonması objenin
 bir kuanton (momentum) boyunca bir tane dönüşü için gerekli
 1'tir.



* Eğer A bir elektrik alanı ifade ediyorsa A 'nin kuantonması bir
 kuanton (C) boyunca toplam elektromotor kuvvetine eşittir.

* Suyun laboratuvar ortamında döne döne alması kuantonmaya bir
 örnek olabilir. Suyun sadece döndüğü ve dönmediği kuanton
 ediyorsa bir kuanton vardır ve akış olmadığı için $\text{div } \hat{A} = 0$
 olur.

$C = \oint \hat{A} \cdot d\vec{r}$ şeklinde ifade edilir

C $\hat{A}$ 'nin kapalı bir kuantonun kuantonması

$\nabla \times \hat{A}$ bir nokta etrafında ne kadar kuantonun

Kuvvetin formu bir vektörel alanın sonsuz küçük yer değişimlerinin doğru integralidir. Bu kuvvetin gücünün noktasal şekilde küçültürsek ve yönünde kuvvetin en fazla olduğu şekilde belirlersek rotasyonel $\hat{A}$ ($wz|\hat{A}$)

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\left[\hat{n} \oint_C \hat{A} \cdot d\vec{l} \right]_{\max}}{\Delta s} = \nabla \times \hat{A}$$

$\hat{A}$ 'nin rotasyoneli $\nabla \times \hat{A}$ bir vektördür, $\hat{A}$ kapalı bir yol boyunca oluşmuşdur alanı sıfıra gidecek hesaplanır. Bu vektörün büyüklüğü alan sıfıra gidecek $\hat{A}$ 'nin vektörizasyonuna eşittir.
 $\Rightarrow$ vektörel alan

Bu vektörün yönünde net kuvvetin en fazla yönercek yöndeki alanın normal yönündedir.

Normal vektör yönünde olabileceği için sağ el kuralı ile belirleriz. parmaklar vektörün kuvveti yönünde ise baş parmak normal gösterir. (Rotasyonelin yönünü verir)

$$\nabla \times \hat{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \quad \nabla = \hat{x} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{y} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{z} \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\hat{A} = A_x \hat{x} + A_y \hat{y} + A_z \hat{z}$$

$$\nabla \times \hat{A} = \hat{x} \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + \hat{y} \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)$$

$\Rightarrow$ Stokes Teoremi

$$\oint_S (\nabla \times \hat{A}) \cdot d\vec{s} = \oint_C \hat{A} \cdot d\vec{l}$$

Bilgi alandaki
tüm alanlar

konu alanı toplam kuvvet

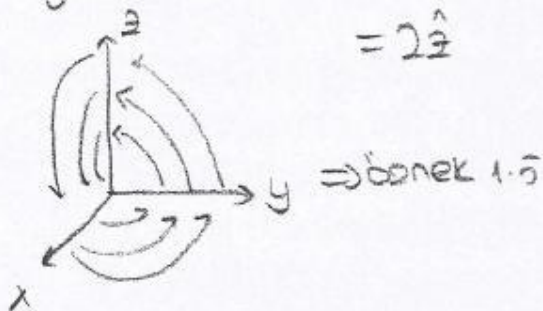
Diverjans Teoremi: $\int_V \underbrace{\nabla \cdot \vec{A}}_{\text{bölümün net çıkışı}} dV = \oint_S \underbrace{\vec{A} \cdot d\vec{S}}_{\text{kapalı yüzeyin çıkışı}}$

*Biz vektör alanın belli bir bölgedeki rotasyoneli 0 alanı kullanarak kapalı cıgı üzerinde vektör alanı kapalı doğru integrale eşitle

Örn $\vec{A} = -y\hat{x} + x\hat{y}$, $\vec{B} = x\hat{y}$ rotasyoneli? $\nabla \times \vec{A} = ?$ $\nabla \times \vec{B} = ?$

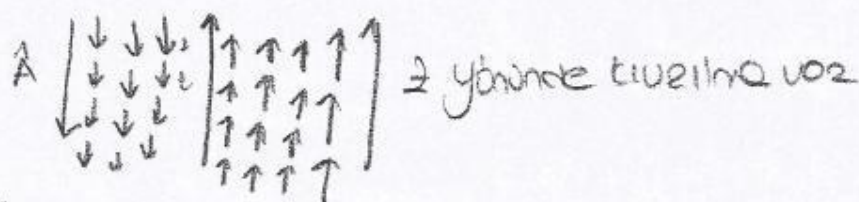
$$\nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y & x & 0 \end{vmatrix} = +x \left(\frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} 0 \right) - \hat{y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 0 - \frac{\partial}{\partial z} (-y) \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} (-y) \right)$$

$$= 2\hat{z}$$



$$\nabla \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & x & 0 \end{vmatrix} = \hat{x} \left(\frac{\partial}{\partial y} 0 - \frac{\partial}{\partial z} x \right) - \hat{y} \left(\frac{\partial}{\partial x} 0 - \frac{\partial}{\partial z} 0 \right) + \hat{z} \left(\frac{\partial}{\partial x} x - \frac{\partial}{\partial y} 0 \right)$$

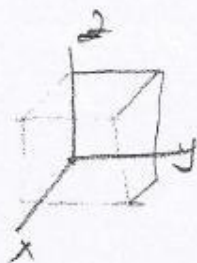
$$= \hat{z}$$



Örn: $\vec{A} = x^2\hat{x} + xy\hat{y} + yz\hat{z}$ Bu vektör alan için divergence teoremini ispat için kullanılarak alan için net yönü 1 olarak kullanabiliriz.

$$\int_V \nabla \cdot \vec{A} dV = \oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$\oint_S d\vec{S}$ in yönü alanın net yönüne göre.



1. ön yüz: $x=1$, $d\vec{S} = \hat{x} dy dz$
2. Arka yüz: $x=0$, $d\vec{S} = -\hat{x} dy dz$
3. Sol yüz: $y=0$, $d\vec{S} = -\hat{y} dx dz$
4. Sağ yüz: $y=1$, $d\vec{S} = \hat{y} dx dz$
5. Üst: $z=1$, $d\vec{S} = \hat{z} dx dy$
6. Alt: $z=0$, $d\vec{S} = -\hat{z} dx dy$

$$\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_S (x^2\hat{x} + xy\hat{y} + yz\hat{z}) \cdot d\vec{S}$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (x^2\hat{x} + xy\hat{y} + yz\hat{z}) \cdot \hat{x} dy dz + \int_0^1 \int_0^1 (x^2\hat{x} + xy\hat{y} + yz\hat{z}) \cdot (-\hat{x}) dy dz + \int_0^1 \int_0^1 (x^2\hat{x} + xy\hat{y} + yz\hat{z}) \cdot (-\hat{y}) dx dz + \int_0^1 \int_0^1 (x^2\hat{x} + xy\hat{y} + yz\hat{z}) \cdot \hat{y} dx dz + \int_0^1 \int_0^1 (x^2\hat{x} + xy\hat{y} + yz\hat{z}) \cdot \hat{z} dx dy + \int_0^1 \int_0^1 (x^2\hat{x} + xy\hat{y} + yz\hat{z}) \cdot (-\hat{z}) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2 dy dz + \int_0^1 \int_0^1 (-x^2) dy dz + \int_0^1 \int_0^1 (-xy) dx dz + \int_0^1 \int_0^1 xy dx dz + \int_0^1 \int_0^1 yz dx dy + \int_0^1 \int_0^1 (-yz) dx dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 x^2 dy dz - \int_0^1 \int_0^1 x^2 dy dz - \int_0^1 \int_0^1 xy dx dz + \int_0^1 \int_0^1 xy dx dz + \int_0^1 \int_0^1 yz dx dy - \int_0^1 \int_0^1 yz dx dy$$

$$= 0$$

$\Rightarrow$ net 0

25. Soru

Doğru cevap $\rightarrow \int_0^1 \int_0^1 x \, dx \, dz = \int_0^1 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 dz = \int_0^1 \frac{1}{2} dz = \left. \frac{z}{2} \right|_0^1 = \frac{1}{2}$

Yanlış cevap

$$\int_0^1 \int_0^1 y \, dy \, dz$$

$$\oint \hat{A} \, ds = 1 + 0 + 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + 0 = 2 \quad \int \nabla \cdot \hat{A} \, dv = \oint \hat{A} \, ds$$

$$\hat{A} = x\hat{x} + xy\hat{y} + yz\hat{z}$$

$$\nabla \cdot \hat{A} = 2x + x + y = 3x + y$$

$$\int (3x + y) \, dv = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (3x + y) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 \left. \frac{3}{2} x^2 + yx \right|_0^1 dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 \left(\frac{3}{2} + y \right) dy \, dz$$

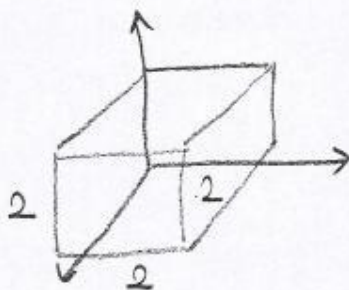
$$\int_0^1 \left(\frac{3}{2} y + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^1 dz = \int_0^1 2 \, dz = \left. 2z \right|_0^1 = 2$$

→ 1 Nisan Salıya

ÖDEV 2

Soru 1: Diverjans teoremini

$\hat{A} = xy\hat{x} + 2yz\hat{y} + 3zx\hat{z}$ fonksiyonu için aşağıdaki küpü kullanarak doğruyu bulunuz



Devon

$$4 = \int_0^1 \int_0^1 (x^2\hat{x} + xy\hat{y} + yz\hat{z}) \cdot (\hat{y} \, dx \, dz) = \int_0^1 \left(\int_0^1 x \, dx \right) dz = 1$$

$$5 = \int_0^1 \int_0^1 (x^2\hat{x} + xy\hat{y} + yz\hat{z}) \cdot (\hat{z} \, dx \, dy) = \int_0^1 \int_0^1 y \, dy \, dx = 1$$

$$6 = \int_0^1 \int_0^1 (x^2\hat{x} + xy\hat{y}) \cdot (-\hat{z} \, dx \, dy) = 0$$

3/

Durğan elektrik

Elektrik alan bizim göre etkiyen kuvvettir

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \hat{r} \quad \hat{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{r^2} \hat{r}$$

$$r^2 = \vec{r} - \vec{r}'$$

$\downarrow \quad \downarrow$
 $Q \quad q$
deneme kaynağı

 yüzey S
— çizgisel yük (λ)

 hacimsel yük (ρ)

$$F = Q \vec{E}$$

$$\vec{E} = \lim_{Q \rightarrow 0} \frac{\vec{F}}{Q} \quad \text{birimi } \frac{N}{C} = \frac{V}{m}$$

ρ birim hacimdeki yük yoğunluğu.
 $\int_V \rho dV = q \quad \hookrightarrow \frac{C}{m^3} \text{ (birimi)}$

serbest uzaydaki statik elektrikin önemli kuzallı varlığı.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$\epsilon_0 = \text{geçirgenlik}$
 $\hookrightarrow \text{serbest uzay.}$

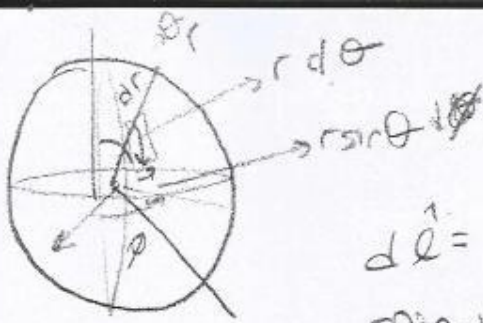
$$\nabla \times \vec{E} = 0$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \frac{C^2}{Nm^2}$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dV = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\int_V \nabla \cdot \vec{E} dV = \frac{q}{\epsilon_0} \quad \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\epsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \hat{r}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \hat{r}$$



$$d\vec{r} = dx \cdot \hat{x} + dy \cdot \hat{y} + dz \cdot \hat{z}$$

silindirik koordinat sisteminde

$$d\vec{r} = ds \cdot \hat{s} + s \cdot d\phi \cdot \hat{\phi} + dz \cdot \hat{z}$$

küresel koordinat sisteminde

$$d\vec{r} = dr \cdot \hat{r} + r \cdot d\theta \cdot \hat{\theta} + r \sin\theta \cdot d\phi \cdot \hat{\phi}$$

silindirik koordinat sisteminde
cikmak zor

sonsuz küçük hacimdeki değişim

$$dV = dx dy dz$$

$$dV = s \cdot ds \cdot s \cdot d\phi \cdot dz$$

$$dV = r^2 \cdot \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi$$

sonsuz küçük alan

$$dx dy, dy dz, dx dz$$

silindirik koordinat sisteminde

$$ds ds, s d\phi ds, s d\phi ds$$

küresel koordinat sisteminde

$$dr d\theta, r \cdot \sin\theta \cdot d\phi \cdot dr, r^2 \cdot \sin\theta \cdot d\phi$$

ÖRNEK R yarıçaplı bir kürenin hacmini hesaplayınız. Küresel koordinat sistemini kullanınız.

dV hacmin sonsuz küçük değişimi

$$\int dV = V = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^R r^2 \cdot \sin\theta \cdot dr \cdot d\theta \cdot d\phi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \left(\sin\theta d\theta \right) dr d\phi$$

$$-\cos\theta \Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2 \quad \int_0^{2\pi} 2 \left(\int_0^R r^2 \cdot dr \right) d\phi =$$

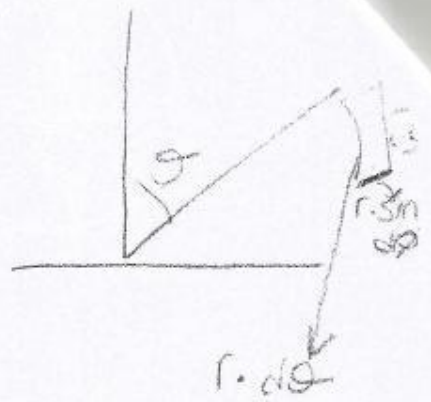
$$\frac{r^3}{3} \Big|_0^R = \frac{R^3}{3} \quad \int_0^{2\pi} \frac{2 \cdot R^3}{3} d\phi = \frac{2}{3} R^3 \phi \Big|_0^{2\pi} = \frac{2}{3} \cdot R^3 \cdot 2\pi = \frac{4\pi R^3}{3}$$

Örnek Küreli bir cismin alanı hesaplayınız

$$\int ds = S \quad ds = r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} r^2 \sin \theta \cdot d\theta \cdot d\phi = r^2 \int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \sin \theta \cdot d\theta \right) d\phi \rightarrow$$

$$= r^2 \int_0^{2\pi} 2 \cdot d\phi = 2r^2 \cdot 2\pi = 4\pi r^2$$



Sürekli yük dağılımları

λ çizgisel yük yoğunluğu $\frac{C}{m}$

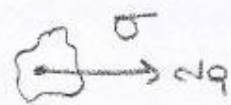
σ yüzeysel yük yoğunluğu $\frac{C}{m^2}$

ρ hacimsel yük yoğunluğu $\frac{C}{m^3}$

$$dq = \lambda \cdot dl'$$

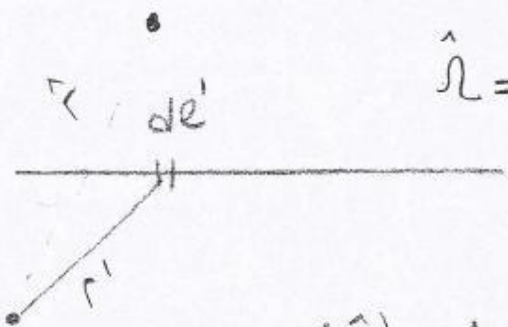
$$dq = \sigma \cdot ds'$$

$$dq = \rho \cdot dv'$$



$$q = \int_L \lambda \cdot dl' \quad q = \int_S \sigma \cdot ds' \quad q = \int_V \rho \cdot dv'$$

Çizgisel bir yükün elektrik alanı $E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(r')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \hat{r}_n \cdot dl'$



$$\vec{r}_n = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

$$E(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{r}_n dq$$

Birim yükün oluşturduğu elektrik alanın toplam elektrik alana dönüşürken integral formülü

$$dE(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \hat{r}_n dq$$

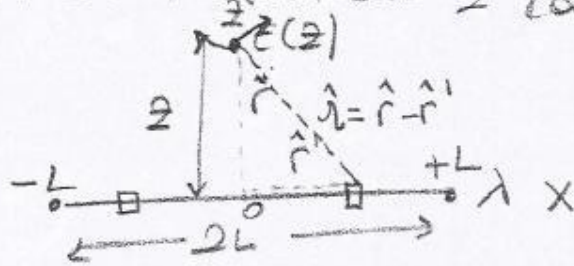
yüzey yükü için

$$E(\hat{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(r')}{|\hat{r}|^2} \hat{e}_n ds'$$

hacim yükü için

$$E(\hat{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r')}{|\hat{r}|^2} \hat{e}_n \cdot dV'$$

ÖRNEK Düzgün bir λ cıgı yük taşıyan $2L$ uzunluğunda bir cıgı potansiyel bir noktasında z kadar uzaklıktaki elektrik alanı bulun



$$E(z) = ?$$

$$\hat{r} = z \cdot \hat{z}$$

$$r' = L \cdot \hat{x} \Rightarrow x \text{ değışkeni değerleştirelim}$$

bulundukları noktaya göre değışkenlik gösterir

$$\hat{r} = z \cdot \hat{z} - x \cdot \hat{x}$$

$$E(\hat{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(r')}{|\hat{r}|^2} \hat{e}_n \cdot d\ell'$$

$$\hat{e}_n = \frac{\hat{r}}{|\hat{r}|} \Rightarrow \text{birim vektör için}$$

$$\hookrightarrow \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda(r')}{|\hat{r}|^3} \cdot \hat{r} \cdot d\ell$$

$$|\hat{r}| = \sqrt{z^2 + (-x)^2}$$

$$E(\hat{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L}^L \frac{\lambda}{(\sqrt{z^2 + x^2})^3} \cdot (z \cdot \hat{z} - x \cdot \hat{x}) \cdot dx \cdot \hat{x}$$