

Adı Soyadı : Kay

Öğ. Nosu : _____

1. Aşağıda verilen Sistem fonksiyonu için, olası bütün yakınsama bölgelerine(ROC) karşılık gelen darbe yanıtlarını (impulse response) , $h(t)$, bulunuz.

$$H(s) = \frac{-s-4}{s^2+3s+2}$$

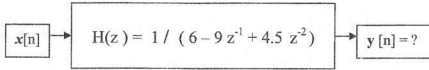
Soru 1	25	
Soru 2	25	
Soru 3	25	
Soru 4	25	
Toplam	100	

2. Z-dönüşümü özelliklerini kullanarak

$$x[n] = n \left[\left(\frac{1}{2} \right)^n u[n] * \left(\frac{1}{4} \right)^{n-2} u[n-2] \right] \text{ sinyalinin Z-dönüşümünü,}$$

$X(z)$, bulunuz. Yakınsama bölgesini(ROC) gösteriniz. $X(z)$ de $z=e^{j\omega}$ yazılarak $x[n]$ 'in Ayırık Zaman Fourier Dönüşümü(DTFT) hesaplanabilir mi?

3. Ayırık-zamanlı bir LTI sistemin transfer fonksiyonu aşağıda verilmiştir. $x[n] = u[n]$ için çıkışı $y[n] = ?$ bulunuz.



Yardımcı NOT: $r^n \cos(\omega_0 n) u[n] \rightarrow (1 - r \cos(\omega_0) z^{-1}) / (1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2})$
 $r^n \sin(\omega_0 n) u[n] \rightarrow r \sin(\omega_0) z^{-1} / (1 - 2r \cos(\omega_0) z^{-1} + r^2 z^{-2})$

4. Ayırık-zamanlı bir LTI sistemin darbe yanıtı(impulse response) aşağıda verilmiştir.

$$h[n] = 4 \delta[n+1] + 12 \delta[n] + 17 \delta[n-1] + 12 \delta[n-2] + 4 \delta[n-3]$$

a) $h[n]$ i $-2 \leq n \leq 4$ aralığı için çiziniz.

b) Sistemin frekans yanıtını $H(e^{j\omega}) = ?$, genliğinin karekökünü $\sqrt{|H(e^{j\omega})|} = ?$ ve fazını $\angle H(e^{j\omega}) = ?$ bulunuz.

Yardımcı NOT: $x[n]$ reel ve çift ise $X(e^{j\omega})$ de reel ve çift (real and even) tir.

Her soru 25 puan; hesap makinesi kullanmayınız; iyi şanslar, Doğan, Avcıbaşı

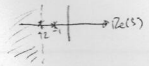
$$1) \quad H(s) = \frac{-s-4}{s^2+3s+2} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+2} = \frac{-3}{s+1} + \frac{2}{s+2}$$

$$A = (s+1)H(s)|_{s=-1} = -3$$

$$B = (s+2)H(s)|_{s=-2} = 2$$

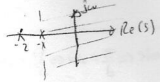
$$a) \quad \operatorname{Re}\{s\} < -2 : \quad h(t) = (3e^{-t} - 2e^{-2t}) u(-t)$$

Nedensel ve kararlı değil.
Anti-causal unstable



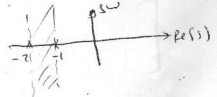
$$b) \quad \operatorname{Re}\{s\} > -1 : \quad h(t) = (-3e^{-t} + 2e^{-2t}) u(t)$$

Nedensel ve kararlı
ROC $\supset$ jw-axis.



$$c) \quad -2 < \operatorname{Re}\{s\} < -1 : \quad h(t) = 3e^{-t} u(-t) + 2e^{-2t} u(t)$$

Nedensel ve kararlı değil.
Non-causal unstable



$$2) \quad a(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n) \xrightarrow{z} A(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$b(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^n u(n) \xrightarrow{z} B(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$c(n) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} u(n-2) = b(n-2) \xrightarrow{z} C(z) = \frac{z^{-2}}{1 - \frac{1}{4}z^{-1}} \quad |z| > \frac{1}{4}$$

$$X(z) = z \left[a(n) * c(n) \right] \Rightarrow X(z) = -z \frac{1}{z^2} [A(z) C(z)]$$

$$A(z) \cdot C(z) = \frac{z^{-2}}{(1 - \frac{1}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2})} = \frac{1}{z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8}}$$

$$\frac{1}{z^2} (A(z) \cdot C(z)) = \frac{-z^2 + \frac{3}{4}}{(z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8})^2} \Rightarrow X(z) = \frac{z^2 z^2 + (-\frac{3}{4}z^2)}{(z^2 - \frac{3}{4}z + \frac{1}{8})^2} \cdot \frac{z^{-4}}{z^{-n}}$$

$$X(z) = \frac{2z^{-2} - \frac{3}{4}z^{-3}}{(1 - \frac{3}{4}z^{-1} + \frac{1}{8}z^{-2})^2} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

ROC $\supset$ (unit circle) birim çember ($|z|=1$) kararlı - Evet DTFT alınabilir.

$$Y(z) = H(z) X(z) = \frac{1}{6 - 9z^{-1} + 4.5z^{-2}} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}}$$

$$Y(z) = \frac{A}{1 - z^{-1}} + \frac{B + Cz^{-1}}{6 - 9z^{-1} + 4.5z^{-2}} \quad \text{PFE}$$

$$A = (1 - z^{-1}) Y(z) \Big|_{z^{-1}=1} = \frac{2}{3} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} Y(z) = \frac{1}{6} = A + \frac{B}{6} \Rightarrow B = -3$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{-1} Y(z) = 0 = -A + \frac{2}{3}C \Rightarrow C = 3$$

$$Y(z) = \frac{2}{3(1 - z^{-1})} + \frac{3z^{-1} - 3}{6 - 9z^{-1} + 4.5z^{-2}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{(1 - z^{-1})} + \frac{3}{6} \frac{z^{-1} - 1}{(1 - 1.5z^{-1} + 0.75z^{-2})}$$

Verilen formüllerden

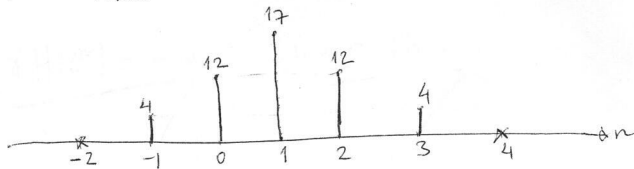
$$r^2 = 0.75 = \frac{3}{4} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow 2r \cos w_0 = \frac{3}{2} \Rightarrow \cos w_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow w_0 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin w_0 = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow r \cos w_0 = \frac{3}{4} \quad \text{ve} \quad r \sin w_0 = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$Y(z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} - \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \frac{3}{4}z^{-1}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{4}z^{-1}}{(1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{3}{4}z^{-2})} \right]$$

$$Y(n) = \left[\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \cos\left(\frac{n\pi}{6}\right) + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^n \sin\left(\frac{n\pi}{6}\right) \right] u[n]$$

4 g) $h[n]$



$$4b) \quad h_1[n] = h_1[n+1] \rightarrow \underbrace{h_1[0] = h_1[1] = 17}_{\text{simetri merkezi}}$$

$$\downarrow \quad H_1(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) e^{j\omega} \Rightarrow H(e^{j\omega}) = H_1(e^{j\omega}) \cdot e^{-j\omega}$$

$\downarrow$ real and even by property $\equiv$ zero-phase

$$H_1(e^{j\omega}) = 4(e^{j2\omega} + e^{-j2\omega}) + 12(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + 17$$

$$H_1(e^{j\omega}) = 8 \cos 2\omega + 24 \cos \omega + 17$$

$\leftarrow$ Use trigonometric identity: $\cos 2\omega = 2 \cos^2 \omega - 1 \rightarrow$

$$H_1(e^{j\omega}) = 8(2 \cos^2 \omega - 1) + 24 \cos \omega + 17$$

$$= 16 \cos^2 \omega + 24 \cos \omega + 17 - 8$$

$$= (4 \cos \omega)^2 + 2 \cdot (4 \cos \omega) \cdot 3 + 3^2$$

$$H_1(e^{j\omega}) = (4 \cos \omega + 3)^2$$

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = (4 \cos \omega + 3)^2 \cdot e^{-j\omega}}$$

$$|H(e^{j\omega})| = (4 \cos \omega + 3)^2 \Rightarrow \sqrt{|H(e^{j\omega})|} = 4 \cos \omega + 3$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\omega$$

Linear phase.