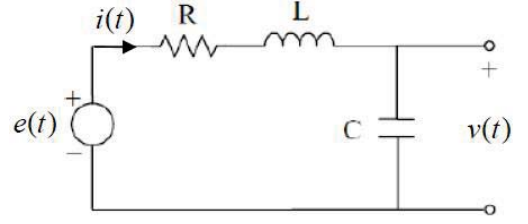


6. Sistem Modelleme Örnekleri

Örnek-1: Elektriksel sistem örneği (seri RLC devresi)

Yandaki seri RLC devresinin a) diferansiyel denklem modelini, b) transfer fonksiyonu modelini, c) bir durum uzayı modelini bulunuz.



Çözüm:

a) Diferansiyel denklem modeli:

Kirchhoff yasasına göre aşağıdaki dinamik denklemleri yazabiliriz.

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t) \quad , \quad \frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t) \quad \rightarrow \quad (\text{dinamik denklemler})$$

$$\frac{1}{C} \int i(t) dt = v(t) \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C} i(t) = \frac{dv(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{di(t)}{dt} = C \frac{d^2v(t)}{dt^2}$$

$$Ri(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int i(t) dt = e(t) \quad \Rightarrow \quad RC \frac{dv(t)}{dt} + LC \frac{d^2v(t)}{dt^2} + v(t) = e(t)$$

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{LC} e(t) \quad \rightarrow \quad (\text{diferansiyel denklem modeli})$$

b) Transfer fonksiyonu modeli:

Dinamik denklemlere sıfır başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümü uygulandığında aşağıdaki denklemler yazılabilir.

$$RI(s) + LsI(s) + \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} = E(s) \quad , \quad \frac{1}{C} \frac{I(s)}{s} = V(s)$$

Burada ikinci denklemdeki $I(s)$ birinci denklemde yerine yazıldığında, çıkış işaretinin Laplace dönüşümünün giriş işaretinin Laplace dönüşümüne oranı aşağıdaki gibi bulunur.

$$\frac{V(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad \rightarrow \quad (\text{transfer fonksiyonu modeli})$$

Transfer fonksiyonu modeli, diferansiyel denklem modeline sıfır başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümü uygulanarak da bulunabilir.

$$s^2V(s) + \frac{R}{L}sV(s) + \frac{1}{LC}V(s) = \frac{1}{LC}E(s) \quad \Rightarrow \quad \frac{V(s)}{E(s)} = \frac{\frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

c) Durum uzayı modeli:

Diferansiyel denklem modelinin giriş tarafı türev içermediği için durum değişkenleri aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v(t) = \frac{1}{LC} e(t) \quad \rightarrow \quad (\text{diferansiyel denklem modeli})$$

$$\begin{aligned} x_1 &= v \\ x_2 &= \dot{v} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{v} \\ \dot{x}_2 &= \ddot{v} = -\frac{R}{L} \dot{v} - \frac{1}{LC} v + \frac{1}{LC} e = -\frac{R}{L} x_2 - \frac{1}{LC} x_1 + \frac{1}{LC} e \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{LC} \end{bmatrix} e \quad \rightarrow \quad (\text{diferansiyel durum denklemi})$$

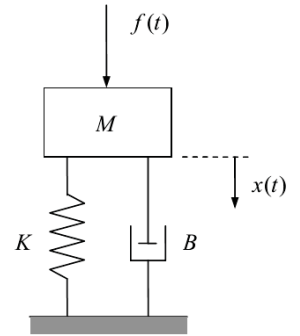
$$v = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad (\text{çıkış denklemi})$$

Örnek-2: Mekanik sistem örneği (kütle-yay-sönümleyici sistem modeli)

Yandaki mekanik sistemin a) diferansiyel denklem modelini, b) transfer fonksiyonu modelini, c) bir durum uzayı modelini bulunuz.

Çözüm:

a) Diferansiyel denklem modeli:



Newton'un hareket yasasına göre $\sum F = Ma$ eşitliğini bu sisteme uygularsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz.

$$f(t) - f_B(t) - f_K(t) = Ma \quad , \quad \text{burada} \quad f_B(t) = B \frac{dx(t)}{dt} \quad , \quad f_K(t) = Kx(t) \quad \text{kullanılırsa}$$

$$f(t) - B \frac{dx(t)}{dt} - Kx(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad \text{eşitliğinden diferansiyel denklem modelini yazabiliriz.}$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{B}{M} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{K}{M} x(t) = \frac{1}{M} f(t) \quad \rightarrow \quad (\text{diferansiyel denklem modeli})$$

b) Transfer fonksiyonu modeli:

Diferansiyel denklem modeline sıfır başlangıç koşulları altında Laplace dönüşümü uygulanarak çıkış işaretinin Laplace dönüşümünün giriş işaretinin Laplace dönüşümüne oranı aşağıdaki gibi elde edilir.

$$s^2 X(s) + \frac{B}{M} sX(s) + \frac{K}{M} X(s) = \frac{1}{K} F(s) \Rightarrow \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{K}}{s^2 + \frac{B}{M}s + \frac{K}{M}} \rightarrow (\text{transfer fonksiyonu})$$

c) Durum uzayı modeli:

Diferansiyel denklem modelinin giriş tarafı türev içermediği için durum değişkenleri aşağıdaki gibi seçilebilir.

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{B}{M} \frac{dx(t)}{dt} + \frac{K}{M} x(t) = \frac{1}{K} f(t) \rightarrow (\text{diferansiyel denklem modeli})$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 = \dot{x} \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x} = -\frac{B}{M} \dot{x} - \frac{K}{M} x + \frac{1}{K} f = -\frac{B}{M} x_2 - \frac{K}{M} x_1 + \frac{1}{K} f \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{K}{M} & -\frac{B}{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{K} \end{bmatrix} f \rightarrow (\text{diferansiyel durum denklemi})$$

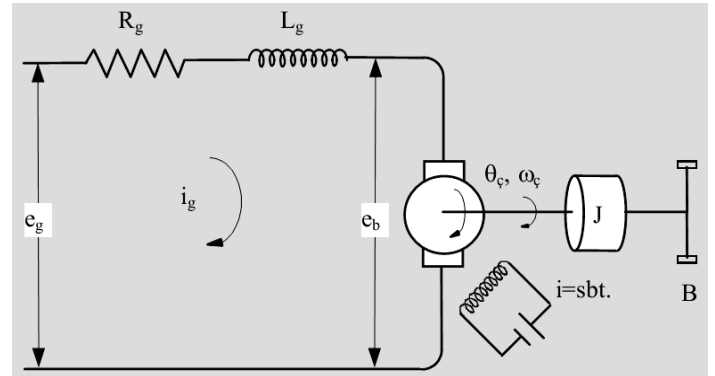
$$x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow (\text{çıkış denklemi})$$

Örnek-3: Elektromekanik sistem örneği
(dc motor modeli)

Yandaki elektromekanik sistemin
a) diferansiyel denklem modelini,
b) transfer fonksiyonu modelini,
c) bir durum uzayı modelini bulunuz.

Çözüm:

a) Diferansiyel denklem modeli:



$$\text{Kirchhoff yasasından : } e_g = R_g i_g + L_g \frac{di_g}{dt} + e_b, \quad e_b = K_b \frac{d\theta_\phi}{dt} \quad (\text{zıt elektro-motor-kuvvet gerilimi})$$

$$\text{Newton yasasından : } M = J \frac{d^2 \theta_\phi}{dt^2} + B \frac{d\theta_\phi}{dt}, \quad M = K_m i_g \quad (\text{motorun ürettiği döndürme momenti})$$

$$e_g = R_g i_g + L_g \frac{di_g}{dt} + K_b \frac{d\theta_\phi}{dt}$$

$$K_m i_g = J \frac{d^2 \theta_\phi}{dt^2} + B \frac{d\theta_\phi}{dt} \rightarrow i_g = \frac{J}{K_m} \frac{d^2 \theta_\phi}{dt^2} + \frac{B}{K_m} \frac{d\theta_\phi}{dt} \rightarrow \frac{di_g}{dt} = \frac{J}{K_m} \frac{d^3 \theta_\phi}{dt^3} + \frac{B}{K_m} \frac{d^2 \theta_\phi}{dt^2}$$

$$e_g = R_g \left(\frac{J}{K_m} \frac{d^2 \theta_\phi}{dt^2} + \frac{B}{K_m} \frac{d\theta_\phi}{dt} \right) + L_g \left(\frac{J}{K_m} \frac{d^3 \theta_\phi}{dt^3} + \frac{B}{K_m} \frac{d^2 \theta_\phi}{dt^2} \right) + K_b \frac{d\theta_\phi}{dt}$$