

EEM322 : Lecture 6

Stability
Closed loop system stability

- Poles positions
- Hurwitz Method
- Routh-Hurwitz

we saw that three requirements enter into the design of a control system:

Transient response,
 Stability,
 Steady-state errors.

Stability is the most important system specification. *If a system is unstable, transient response and steady-state errors are moot points.* An unstable system cannot be designed for a specific transient response or steady-state error requirement.

The total response of a system is the sum of the forced and natural responses, or

$$c(t) = c_{\text{forced}}(t) + c_{\text{natural}}(t)$$

A linear, time-invariant system is **stable** *if the natural response approaches zero as time approaches infinity.*

A linear, time-invariant system is **unstable** *if the natural response grows without bound as time approaches infinity.*

A linear, time-invariant system is **marginally stable** *if the natural response neither decays nor grows but remains constant or oscillates as time approaches infinity.*

A system is unstable if any bounded input yields an unbounded output.

Lineer zamanla değişmeyen sistemlerin doğal cevabı zamanla **sıfıra** gidiyorsa sistem **kararlıdır** denir.

$$c(t) = c_{zor}(t) + c_{öz}(t)$$

Sistem toplam cevabı doğal(öz) ve zorlanmış çözümün toplamı olduğu için **kararlı** sistemlerde doğal çözüm zamanla sıfıra ulaşacağı için toplam cevap zorlanmış cevap olur.

Lineer zamanla değişmeyen sistemlerin **doğal cevabı zamanla sonsuza gidiyorsa** sistem **kararsızdır** denir. Lineer zamanla değişmeyen sistemlerin doğal cevabı zamanla azalmıyorsa ve artmıyorsa sistem marjinal kararlıdır denir. Sabit veya osilasyonlu cevap üretilir. Parametre değişimine duyarlı oldukları için kararsız kabul edilirler.

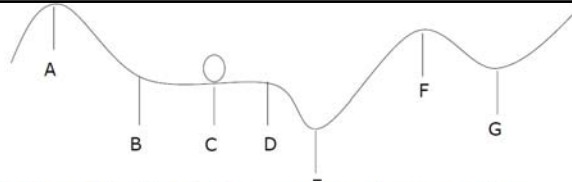
Fiziksel olarak, doğal cevabı sınırsız olan kararsız sistemler kendilerine, etrafındaki araçgereçlere veya insanlara zarar verebilirler.

Lineer sistemlerde kararlılık sistemin kendi özelliğidir.

Kararlı bir lineer sistemin denge noktasına bir bozucu etki tesir ederse, sitem zamanla kendiliğinden denge noktasına döner.

kararsız noktalar

Kararlı noktalar
nötr kararlıdır



Top **A** ve **F** noktalarında iken küçük bir kuvvet uygulanırsa, **A** ve **F** noktalarına bir daha dönemez. Bu durumda **A** ve **F** noktaları kararsız noktalar.

Top **E** ve **G** noktalarında iken küçük bir kuvvet uygulanırsa, **E** ve **G** noktalarına salınım yaparak geri döner. Bu durumda **E** ve **G** noktaları kararlı noktalar.

Top **B** ve **D** noktaları arasında iken küçük bir kuvvet uygulanırsa, yeni noktasında kalır. **C** gibi böyle noktalara nötr kararlı denir.

Bir sistemin kararsız olması için en az bir kutbunun sağ yaradüzlemde **yada imajiner eksen üzerinde katlı kökünün olması yeterlidir.**

İmajiner eksen üzerinde bir kök varsa sistem cevabı osilasyonludur. Bu tip sistemlere marjinal kararlı sistemler denir.

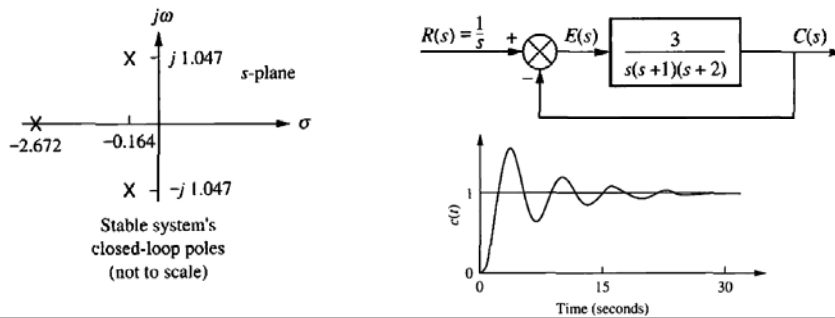
İmajiner eksen üzerinde katlı kök varsa
şeklinde

$$At^n \cos(\omega t + \phi)$$

Bir cevap üretir ki buda zamanla sonsuza gider ve sistem bu durumda yine kararsızdır.

If the closed-loop system poles are in the left half of the plane and hence have a negative real part, the system is stable. That is, *stable systems have closed-loop transfer functions with poles only in the left half-plane*. Poles in the right half-plane (rhp) yield either pure exponentially increasing or exponentially increasing sinusoidal natural responses. These natural responses approach infinity as time approaches infinity. Thus, **if the closed-loop system poles are in the right half of the s-plane and hence have a positive real part, the system is unstable.**

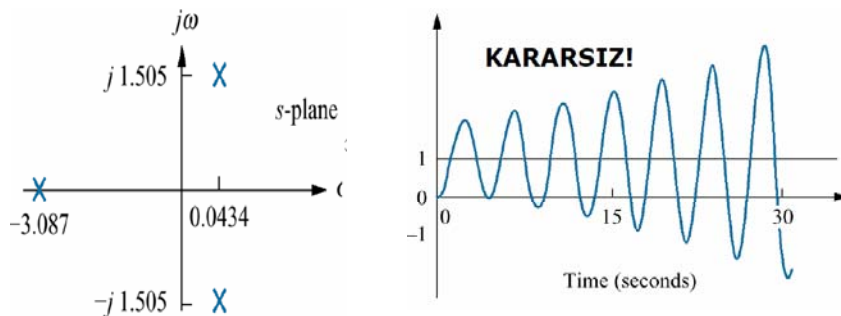
Finally, a system that has imaginary axis poles of multiplicity 1 yields pure sinusoidal oscillations as a natural response. These responses neither increase nor decrease in amplitude. Thus, **marginally stable systems have closed-loop transfer functions with only imaginary axis poles of multiplicity 1 and poles in the left half-plane**



Örnek

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} = \frac{\frac{7}{s(s+1)(s+2)}}{1 + \frac{7}{s(s+1)(s+2)}} = \frac{7}{s^3 + 3s^2 + 2s + 7}$$

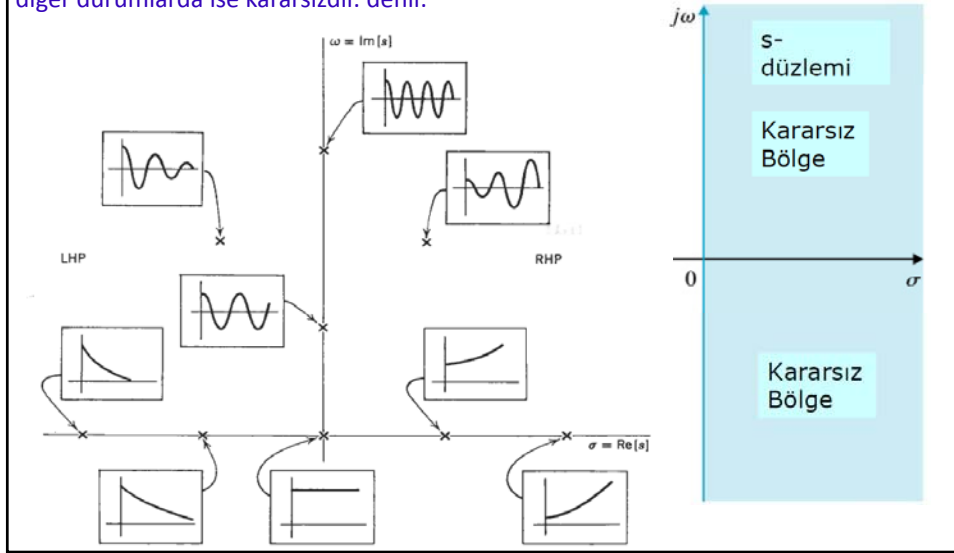
$$s_1 = -3.087, s_{2,3} = 0.043 \pm j1.505$$



Sağ yarı düzlemdeki kutuplar ya üstel artımla yada üstel artan sinüsoidal doğal cevap oluşturur ki doğal cevap zamanla sonsuza kadar artar.

Kararlılığın bir diğer tanımı da; sistemin girişine uygulanan bütün sınırlı giriş işaretleri için çıkışta sınırlı kalıyorsa sistem kararlıdır denir. (BIBO)

Lineer zamanla değişmeyen sistemlerde, sistem kutupları sol yarı-düzlemde ise kararlı, diğer durumlarda ise kararsızdır. denir.



Hurwitz testi.

Eğer bir kapalı döngü transfer fonksiyonunun bütün kutupları sol yarı düzlemde ise, bu sistemim paydasındaki polinomunu, yani karakteristik denklemini, $(s+a_i)$ şeklinde çarpanlara ayırabiliriz. a_i 'ler pozitif yada pozitif gerçel kısma sahip karmaşık sayılardır.

Böylece buradan $(s+a_i)$ 'lerin çarpımlarının bütün katsayıları pozitif olan polinom oluşturması gerektiğini söyleyebiliriz. Ayrıca bütün katsayılar var olmalıdır.

Buradan bir sistemin kararsız olduğunu söylemek için katsayıların işaretlerinden bir **tanenin negatif** olmasının yeterli olduğunu belirtebiliriz. **Eğer s'in kuvvetlerinden biri eksik ise sistem ya kararsızdır yada marjinal kararlıdır.**

Kısaca: Hurwitz testi : Kararlı bir sistemin karakteristik polinomunun bütün katsayıları var olmalı ve pozitif olmalıdır. Bu test sistemin kararlılığı için gerekli fakat yeterli değildir.

ROUTH-HURWITZ CRITERION:

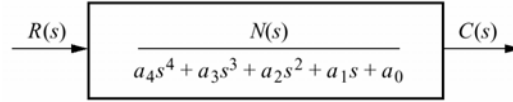
Bu method iki adımdan oluşur:

1. Routh ablosunu oluşturmak
2. Tabloyu yorumlamak

Bu yöntemle kapalı döngü sist. kutuplarını çözmeden sistem kararlılığı hakkında bilgi sahibi oluruz.

Ayrıca sistemin kaç tane sol yarı düzlemde, kaç tane sağ yarı düzlemde ve kaç tane imajiner eksen üzerinde kutbu olduğunu bulabiliriz.

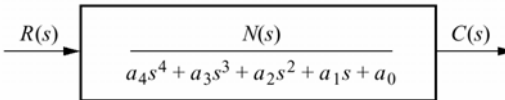
Bu method'a **RouthHurwitzkriteri** adı verilir, 1905.



▪ Initial layout for Routh table:

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2			
s^1			
s^0			

İlk kolona s 'nin en yüksek derecesiden başlayarak 0'ıncı kuvvetine kadar dereceleri yazılır. Daha sonra il satıra en yüksek derecenin katsayısı ve birer atlayarak diğer derecelerin katsayıları yazılır. İkinci satıra en yüksek ikinci derecenin katsayısı ve birer atlayarak diğer derecelerin katsayıları yazılır.

ROUTH-HURWITZ CRITERION

s^4	a_4	a_2	a_0
s^3	a_3	a_1	0
s^2	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_2 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix}}{a_3} = b_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & a_0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = b_2$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_4 & 0 \\ a_3 & 0 \end{vmatrix}}{a_3} = 0$
s^1	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}}{b_1} = c_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} a_3 & 0 \\ b_1 & 0 \end{vmatrix}}{b_1} = 0$
s^0	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = d_1$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} b_1 & 0 \\ c_1 & 0 \end{vmatrix}}{c_1} = 0$

Block diagram of a feedback control system:

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1000}{s^3 + 10s^2 + 31s + 1030}$$

s^3	1	31	0
s^2	~~10~~ 1	~~1030~~ 103	0
s^1	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 31 \\ 1 & 103 \end{vmatrix}}{1} = -72$	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}{1} = 0$
s^0	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 103 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 103$	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$	$-\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -72 & 0 \end{vmatrix}}{-72} = 0$

The number of roots of the polynomial that are in the right half-plane is equal to the number of sign changes in the first column.
 A system is stable if there are no sign changes in the first column of the Routh table.
 birinci kolondaki işaret değişim sayısı kadar sistemin sağ yarı düzlemde kökü vardır.

Routh-Hurwitz Kriterinde Özel Durumlar

1. Satırlardan herhangi birinin ilk elamanının sıfır olması

Sıfıra bölümünlemek için sıfır yerine ϵ yazarız.

Görüldüğü gibi ϵ pozitif de seçilse negatifte seçilse sistem kararsızdır

$$T(s) = \frac{10}{s^5 + 2s^4 + 3s^3 + 6s^2 + 5s + 3}$$

s^5	1	3	5	+	
s^4	2	6	3	+	
s^3	~~0~~ ϵ	7/2	0	+	
s^2	$\frac{6\epsilon - 7}{\epsilon}$	3	0	-	
s^1	$\frac{42\epsilon - 49 - 6\epsilon^2}{12\epsilon - 14}$	0	0	+	
s^0	3	0	0	+	

Example:

First write a polynomial has the reciprocal roots of the denominator

$$D(s) = 3s^5 + 5s^4 + 6s^3 + 3s^2 + 2s + 1$$

Signs changed twice
times → UNSTABLE (two
poles in right half-plane)

s^5	3	6	2
s^4	5	3	1
s^3	4.2	1.4	
s^2	1.33	1	
s^1	-1.75		
s^0	1		

ROUTH-HURWITZ CRITERION: (ikinci özel durum)**2. Satırlardan Birinin Tamamen Sıfır Olması:**

- Bu durumda, bir önceki satıra gidip yardımcı polinom oluştururuz
- Polinom ilgili satırın s 'in derecesi ile başlar ve birer atlayarak devam eder.
- Sonra polinomun s 'yegöre türevini alırsınız.
- Bu katsayıları tamamı sıfır olan satırda kullanırsınız.

Örnek: $T(s) = \frac{10}{s^5 + 7s^4 + 6s^3 + 42s^2 + 8s + 56}$

s^5	1	6	8
s^4	~~7~~ 1	~~42~~ 6	~~56~~ 8
s^3	0	0	0
s^2			
s^1			
s^0			

s^5	1	6	8
s^4	~~7~~ 1	~~42~~ 6	~~56~~ 8
s^3	0	0	0

$$P(s) = s^4 + 6s^2 + 8$$

Sonra polinomun s' 'ye göre türevini alınız.

Bu katsayıları tamamı sıfır olan satırda kullanılır.

$$\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 12s$$

s^5	1	6	8
s^4	1	6	8
s^3	~~0~~ ~~4~~ 1	~~0~~ ~~12~~ 3	~~0~~ ~~0~~ 0
s^2	3	8	0
s^1	1/3	0	0
s^0	8	0	0

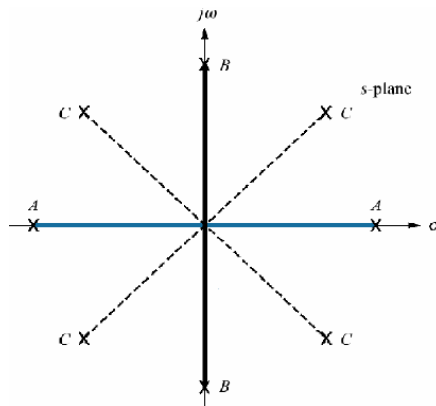
Not: Routh tablosunda bir satırın tamamen sıfır olması, polinomda tamamen tek sayılı derecelerin yada çift sayılı derecelerin olmasından kaynaklanır. **Örnek**

$$s^4 + s^2 + 7$$

Çift sayı derecelerin kökleri orjine göre simetriktir. Bu simetri:

- A) Reel simetrik olabilir
- B) İmajiner Simetrik olabilir
- C) Dört bölgesi olabilir.

Sıfır satırı bize kökleri orjine göre simetrik olan çift sayı dereceli polinomun varlığını söyler



Örnek:

$$T(s) = \frac{20}{s^8 + s^7 + 12s^6 + 22s^5 + 39s^4 + 59s^3 + 48s^2 + 38s + 20}$$

Yukarıdaki kapalı döngü transfer fonksiyonunun kararlılığını Routh tablosu oluşturarak belirleyiniz.

s^8	1	12	39	48	20
s^7	1	22	59	38	0
s^6	~~-10~~ -1	~~-20~~ -2	~~10~~ 1	~~20~~ 2	0
s^5	~~20~~ 1	~~60~~ 3	~~40~~ 2	0	0
s^4	1	3	2	0	0
s^3	0	0	0	0	0
s^2					
s^1					
s^0					

Polinomu oluşturacak olursak: $P(s) = s^4 + 3s^2 + 2$

Ve Türevi $\frac{dP(s)}{ds} = 4s^3 + 6s$

s^8	1	12	39	48	20
s^7	1	22	59	38	0
s^6	~~-10~~ -1	~~-20~~ -2	~~10~~ 1	~~20~~ 2	0
s^5	~~20~~ 1	~~60~~ 3	~~40~~ 2	0	0
s^4	1	3	2	0	0
s^3	0 ~~4~~ 2	0 ~~6~~ 3	0 ~~0~~ 3	0	0
s^2	~~3/2~~ 3	~~2~~ 4	0	0	0
s^1	1/3	0	0	0	0
s^0	4	0	0	0	0

s^4 den s^0 ' a kadar işaret değişimi olmadığı için sağ yarı düzlemde kutup yoktur.

Eğer sağ yarı düzlemde kutup yoksa simetrisi de olamayacağından sol yarı düzlemde yoktur.

Buradan 4 kökün $j\omega$ ekseninde olduğunu anlarız.

Diğer kutuplar s^8 den s^4 e kadar olan kutuplardır. Bu iki kuvvet arasında iki işaret değişimi olmuştur ki bunun manası sağ yarı düzlemde iki kök mevcuttur.

Sonuç olarak transfer fonksiyonunun iki sağ yarı düzlemde, iki sol yarı düzlemde ve 4 imajiner eksen üzerinde kutbu vardır. Sağ yarı düzlemde en az bir kutbun olması sistemin kararsız olduğunu söylemek için yeterli idi, doalyısıyla sistem kararsızdır.

Eğer $K < 1386$ ise birinci sütundaki tüm elemanlar pozitif olur ve sistem kararlıdır diyebiliriz, sistemin üç kutbu da sol yarı düzlemde.

Eğer $K > 1386$ ise s^1 deki birinci sütundaki ilk eleman negatif olur. İlk sütunda iki defa işaret değişimi görünür ki kutuplardan iki tanesi sağ yarı düzlemde ve sistem kararsızdır.

Eğer $K = 1386$ ise s^1 deki tüm elemanlar 0 olur.

Polinomu oluşturacak olursak: $P(s) = 18s^2 + 1386$

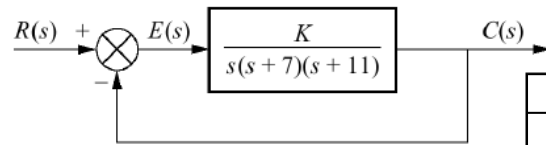
Ve Türevi $\frac{dP(s)}{ds} = 36s$

s^2 li terimden sonra işaret değişimi olmadığı için çift polinomun iki kökü $j\omega$ ekseninde üzerindedir. s^2 li terimin üzerinde işaret değişimi olmadığı için diğer kök sol yarı düzlemde. Sistem marinal kararlıdır.

s^3	1	77
s^2	18	1386
s^1	0 36	
s^0	1386	

Example :

Find the range of gain, K , for the system of system below that will cause the system to be stable, unstable, and marginally stable. Assume $K > 0$



$$T(s) = \frac{K}{s^3 + 18s^2 + 77s + K}$$

s^3	1	77
s^2	18	K
s^1	$\frac{1386 - K}{18}$	
s^0	K	

s^3	1	77
s^2	18	K
s^1	$\frac{1386 - K}{18}$	
s^0	K	

If $K < 1386$:

- ⇒ All terms in the first column → positive.
- ⇒ No sign changes
- ⇒ The system has 3 poles in the left half-plane.
- ⇒ **STABLE !**

If $K > 1386$:

- ⇒ Two signs change
- ⇒ The system has 2 poles in the right half-plane.
- ⇒ One pole in the left half-plane.
- ⇒ **UNSTABLE !**

Abstract:

Let us summarize our definitions of stability for linear, time-invariant systems.

Using the natural response:

1. A system is stable if the natural response approaches zero as time approaches infinity.
2. A system is unstable if the natural response approaches infinity as time approaches infinity.
3. A system is marginally stable if the natural response neither decays nor grows but remains constant or oscillates.

Using the total response (BIBO):

1. A system is stable if *every bounded input yields a bounded output*.
2. A system is unstable if *any bounded input yields an unbounded output*.

Özet

Lineer kapalı döngü sistemlerin kararlılıkları kutuplarının s düzlemindeki konumları ile belirlenebilir. Eğer kutuplardan herhangi biri sağ-yarı düzlemde ise geçici rejim cevabı monoton olarak artar veya artan genlikle osilasyonlu oluşturur. Böyle sistemler kararsız sistemler olarak adlandırılır. Kararsız sistemler, çalıştırıldığında çıkış zamanla artış gösterir. Eğer herhangi bir doyum fonksiyonu uygulanmadıysa veya mekaniksel sınırlandırma getirilmediyse fiziksel sistem mekaniksel hasar görebilir. Dolayısıyla kapalı döngü sistemlerinin kutuplarının sağ-yarı düzlemde olmasından kaçınılır. Eğer sistemin bütün kutupları Jw ekseninin sol tarafında yer alıyorsa her türlü geçici rejim sönümle denge noktasına ulaşır.

Kararlılık sistemin kendi özelliğidir, sistem kararlı veya kararsız olsun sistem giriş fonksiyonundan bu özelliği bağımsızdır. Sistem girişi sistemin kararlı veya kararsız olmasını etkileyemez ama çözümde kendini gösterir. Matematiksel olarak, jw eksenini üzerindeki kutuplar osilasyona sebebiyet verirler ve bu osilasyonların enlikleri zamanla ne artar ne de azalır. Pratikte, yani gürültülü ortamda, gürültünün seviyesine göre osilasyonun genliği artış gösterir. Dolayısıyla, kontrol sistemi Jw eksenini üzerinde kutup içermemelidir.

Stability in State Space:

State-Space Representation to Transfer Function

Eigenvalues and Transfer Function Poles

The roots of $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$ are the *eigenvalues of the system matrix, A*

The eigenvalues are equal to the poles of the system's transfer function.

Laplace Transform Solution of State Equations

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} && \xrightarrow{\text{Laplace Transform}} && T(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D} \\ &&& && \frac{Y(s)}{U(s)} = \mathbf{C} \left[\frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \right] \mathbf{B} + \mathbf{D} \\ (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} &= \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} && && = \frac{\mathbf{C} \text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) \mathbf{B} + \mathbf{D} \det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})} \end{aligned}$$

The values of the system's poles are equal to the eigenvalues of the system matrix, A. We stated that the eigenvalues of the matrix A were solutions of the equation $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$, which also yielded the poles of the transfer function.

Eigen values (the poles of a system are the same as the eigenvalues of its state matrix)

The Equation is known as the characteristic equation of transformation, **which is also the characteristic equation of the matrix A**. The characteristic equation has n roots λ_i , $i = 1$ to n , **known as Eigen values and corresponding to each root**,

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = |\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = 0$$

Example : consider the matrix **A** given by

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

$(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$ becomes

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 6 & \lambda + 5 \end{bmatrix}$$

The characteristic equation is found to be

$$|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}| = (\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$$

$$\lambda_1 = -2 \text{ and } \lambda_2 = -3$$

The poles of the system are the roots of the characteristic equation $\det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}] = 0$, and its roots the eigenvalues of **A**. Thus,.

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \frac{\text{adj}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}{\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})}$$

PROBLEM: Given the system:

find out how many poles are in the left half-plane, in the right half-plane, and on the *iw-axis*.

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 10 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0 \quad 0] \mathbf{x}$$

$$(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 2 & 8 & 1 \\ -10 & -5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -3 & -1 \\ -2 & s-8 & -1 \\ 10 & 5 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A}) = s^3 - 6s^2 - 7s - 52$$

Using this polynomial, form the Routh table

s^3	1	-7
s^2	~~-6~~ -3	~~-52~~ -26
s^1	~~47~~ 3	~~0~~ 0
s^0	-26	

If $\det(s\mathbf{I} - \mathbf{A})$, a polynomial in s , cannot be factored easily, we can apply the Routh-Hurwitz criterion to it to evaluate how many eigenvalues are in each region of the s -plane.

Since there is one sign change in the first column, the system has one righthalf-plane pole and two left-half-plane poles. It is therefore unstable.