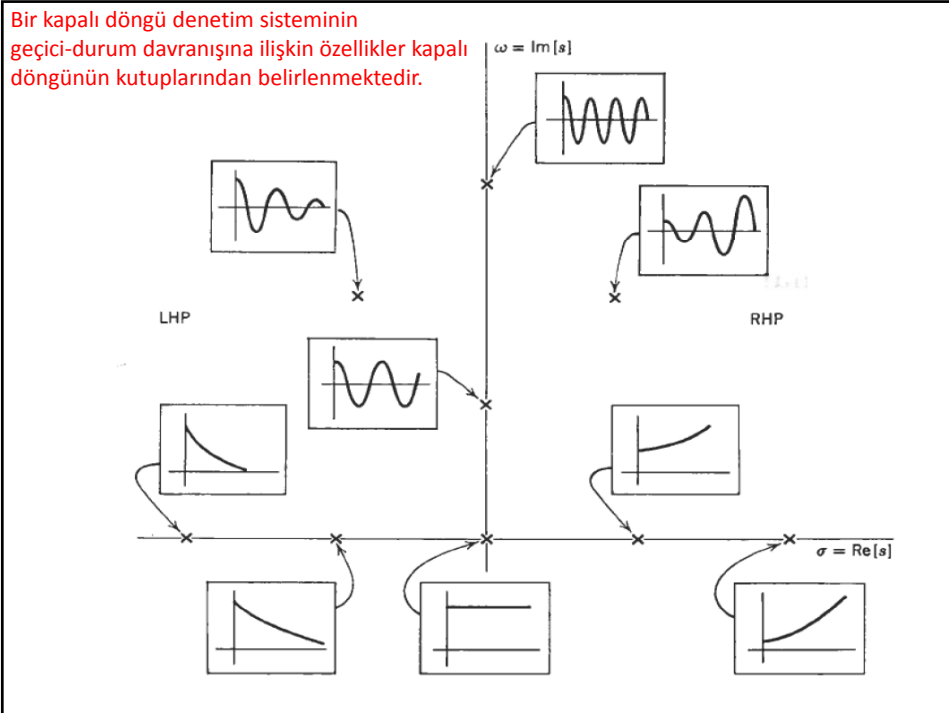


EEM322L8b:
Root locus (kök yer eğrisi)
Çizim yöntemi ve adımları



Kök Yer Eğrisi adını

Bir kapalı döngü denetim sisteminin geçici-durum davranışına ilişkin özellikler kapalı döngünün kutuplarından belirlenmektedir.

Kapalı döngünün kutupları ise **özyapısal denklemin kökleridir**. “K” sisteme ait bir kazanç terimini göstermek üzere özyapısal denklem aşağıdaki ifade ile bulunmaktadır.

$$1 + K \cdot G(s)H(s) = 0$$

Özyapısal denklemin köklerinin geometrik yeri, sistem kazancı olan parametrenin tüm değerleri için s-düzleminde çizilir. Bu geometrik yerlerin birleştirilmesi ile oluşturulan eğri de **Kök Yer Eğrisi adını** almaktadır.

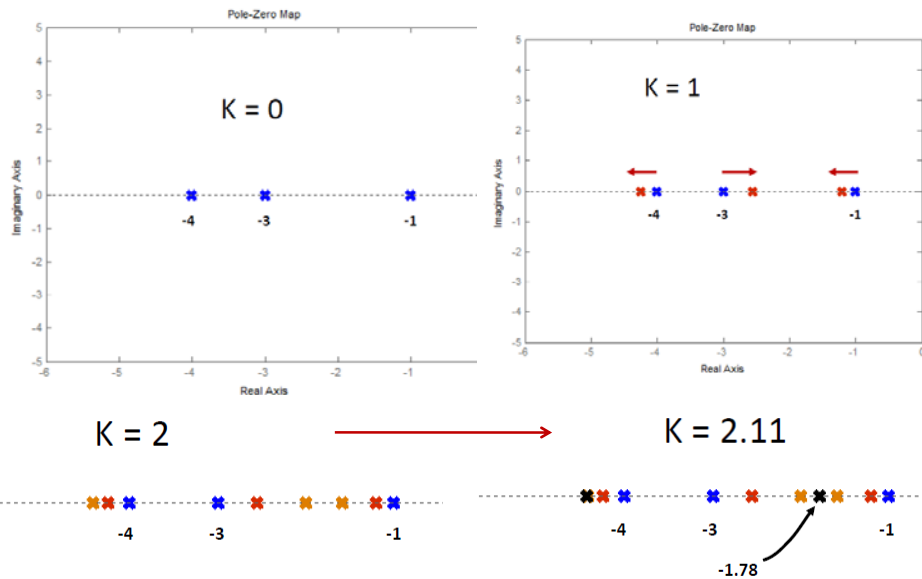
$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+4)} \quad \text{ve} \quad H(s) = 1$$

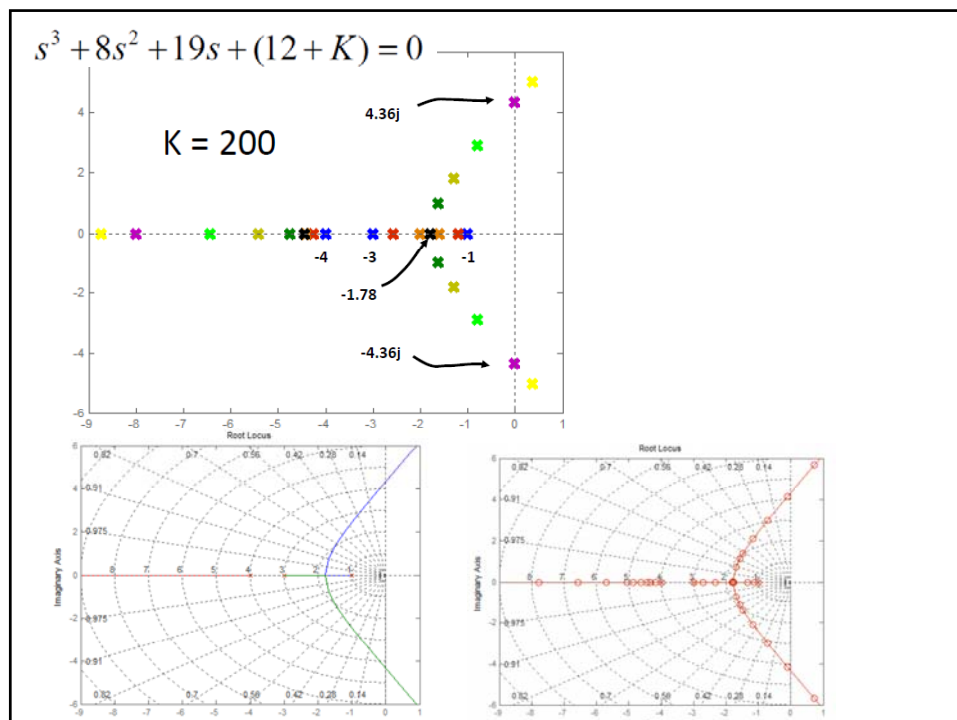
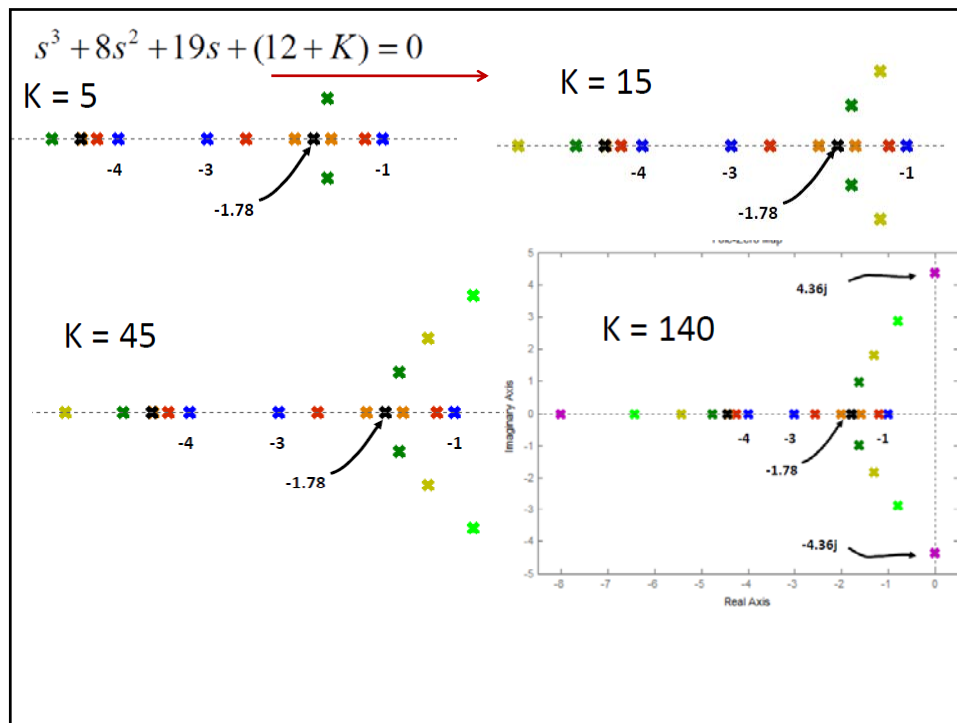
$$\text{iken özyapısal} \quad 1 + K * \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+4)} = 0$$

$$(s+1)(s+3)(s+4) + K = 0$$

$$s^3 + 8s^2 + 19s + (12 + K) = 0$$

$$s^3 + 8s^2 + 19s + (12 + K) = 0$$





Çizim aşamaları

ADIM 1: özyapısal denklemin derecesi (açık döngü kutup sayısı) kök yer eğrisinin kol sayısını verir. (**K= 0** için)

$$s^3 + 8s^2 + 19s + (12 + K) = 0 \quad \longrightarrow \quad s^3 + 8s^2 + 19s + 12 = 0$$

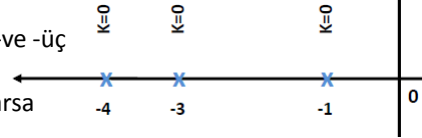
Buna göre çizeceğimiz kök yer eğrisinin **3 adet kolu** olacaktır.

ADIM 2:

Açık döngü kutupları kök yer eğrisinin başlangıç noktalarını (**K=0**), sıfırları ise bitiş noktalarını (**K= ∞**) oluşturur.

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+4)}$$

Buna göre sistemimizin 1 3 4 noktalarında -1, -ve -üç kutbu ve mevcuttur ve hiç sıfırı yoktur. s-düzlemi üzerinde bu kutuplar "x" ile (K=0) varsa sıfırlarda "o" ile (K= ∞) işaretlenir.



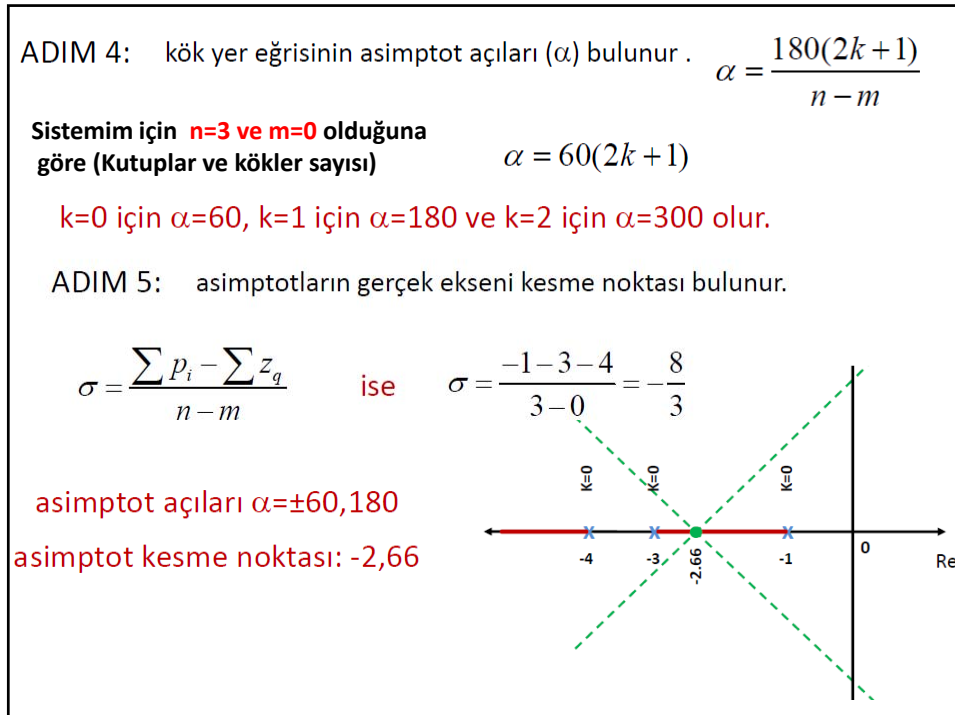
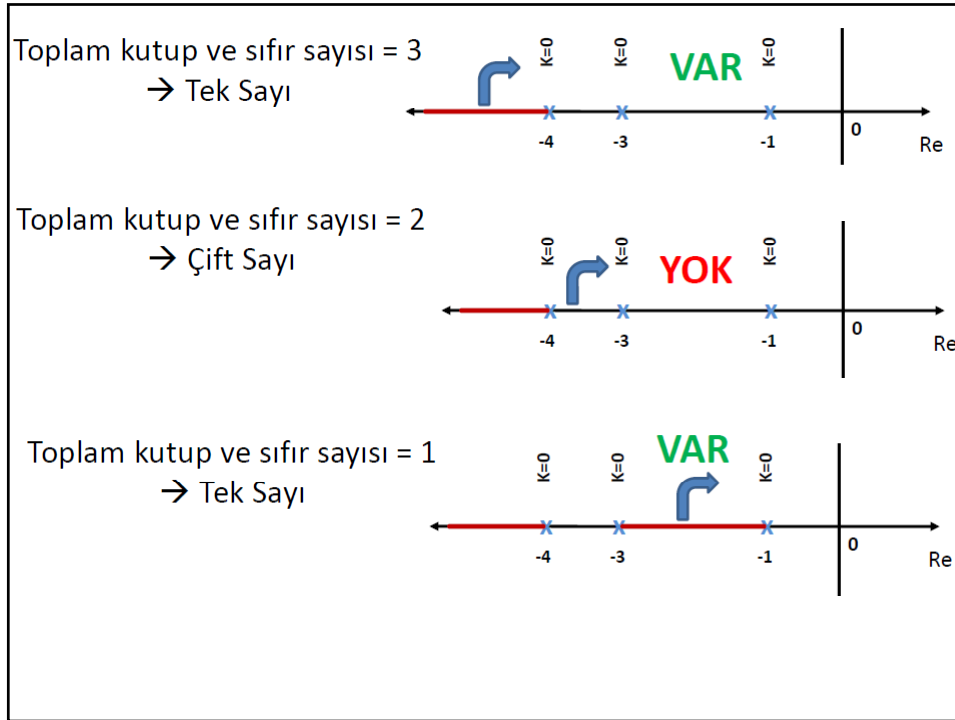
ADIM 3: Gerçek eksen üzerindeki kök yer eğrisi kolları bulunur. Bunun için açık döngü kutup ve sıfırlarından yararlanılır. Şöyle ki;

Gerçek eksen üzerinde en solda yer alan kutup veya sıfırın da solundan başlanarak test noktaları seçilir. Sistemimizde bu "-4" noktasının solu olmaktadır.

Bu test noktasının sağında yer alan toplam kutup ve sıfır sayısı tek ise o noktadan kök yer eğrisi geçmekte, çift ise geçmemektedir.

Bu işlem en sağdaki kutup ya da sıfıra kadar devam ettirilir.

***** Teste karmaşık kutup veya sıfırlar dahil edilmez!**



ADIM 6:

kök yer eğrisinin gerçel eksenden ayrılma noktası bulunur . Bunun için özyapısal denklemden “K” çekilip s’e göre türevi alınarak sıfıra eşitlenmelidir.

Sistemimizin özyapısal denklemi:

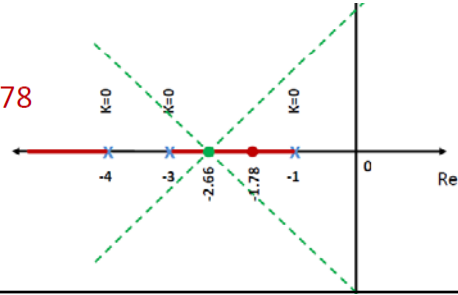
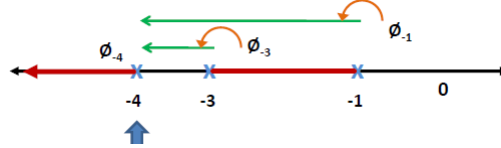
$$K = -(s^3 + 8s^2 + 19s + 12) \quad 1 + K \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+4)} = 0$$

olduğuna göre türevi alınıp sıfıra eşitlenirse;

$$-(3s^2 + 16s + 19) = 0$$

denklem çözüldüğünde **s=-1.78 ve s=-3.54**’ te iki kök çıkar. **-3.54 kök yer eğrisinin olmadığı bir bölgede kaldığından aranan değer -1.78’dir.**

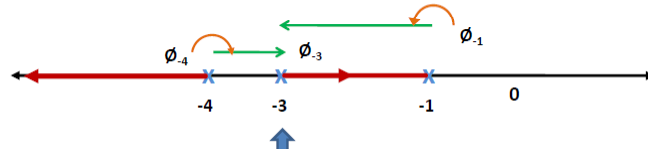
Kök yer eğrisinin gerçel eksenden ayrılma noktası: -1.78

**ADIM 7: kök yer eğrisinin kutuplardan ayrılma açılarını tespit etmek için açı koşulu işletilir.**

$$\phi_{-1} + \phi_{-3} + \phi_{-4} - (\theta_x + \theta_y + \dots) = -180 \quad (\theta: \text{varsa sıfırların açıları})$$

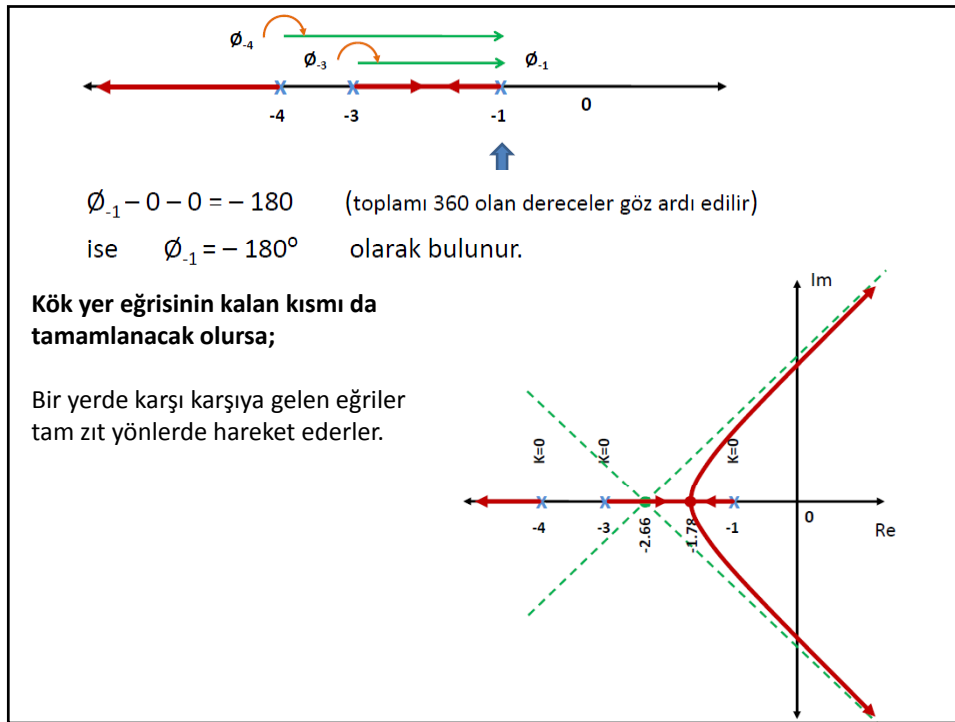
$$-180 - 180 + \phi_{-4} = -180 \quad (\text{toplamı 360 olan dereceler göz ardı edilir})$$

$$\text{ise } \phi_{-4} = -180^\circ \quad \text{olarak bulunur.}$$



$$-180 - \phi_{-3} - 0 = -180 \quad (\text{toplamı 360 olan dereceler göz ardı edilir})$$

$$\text{ise } \phi_{-3} = 0^\circ \quad \text{olarak bulunur.}$$



ADIM 8: kök yer eğrisinin sanal eksenini kestiği noktaların değeri ve bu noktalardaki “K” değeri bulunur. Bunun için sistemin özyapısal denkleminde Routh-Hourwitz Kriteri uygulanır. özyapısal denklemi:

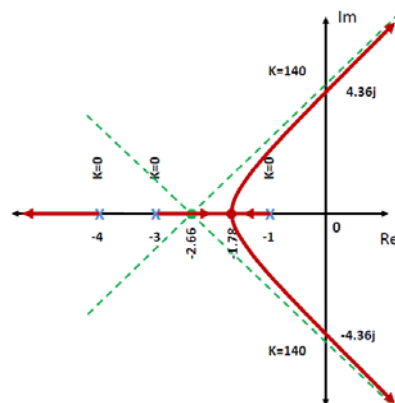
$$s^3 + 8s^2 + 19s + 12 + K = 0$$

s^3	1	19
s^2	8	$12 + K$
s^1	$35/2 - K/8$	0
s^0	$12 + K$	0

Bulunan K değeri özyapısal denklemde yerine konulup çözüldüğünde eğrinin sanal eksenini kestiği değer $\pm 4,36j$ bulunur.

Son bulunan değerlerde yerleştirilecek olursa

Buradan “K” değeri **140** olarak bulunur.
(Kararlılık sınırındaki K değeri)



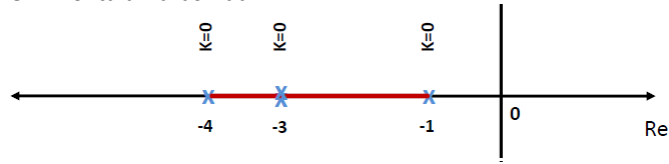
Transfer fonksiyonunda katlı kutup olması durumunda;

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)^2(s+4)} \quad \text{ve} \quad H(s) = 1$$

ADIM 1: Kök yer eğrisinin kol sayısı (açık döngü kutup sayısı) yine **4 adet olacaktır.**

ADIM 2: Sistemimizin -1 ve -4 noktalarında tek katlı, -3 noktasında çift katlı olmak üzere 4 kutbu ($K=0$) vardır

ADIM 3: Gerçek eksen üzerindeki kök yer eğrisi kolları -4 ve -3 noktaları ile -3 ve -1 noktaları arasında çıkmaktadır.



ADIM 4: $\alpha = \frac{180(2k+1)}{n-m}$ $n=4$ ve $m=0$ için $\alpha = 45(2k+1)$

$k=0$ için $\alpha=45$, $k=1$ için $\alpha=135$, $k=2$ için $\alpha=225$ ve $k=3$ için $\alpha=315$ olur.

ADIM 5: $\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_q}{n-m}$ ise $\sigma = \frac{-1-3-3-4}{4-0} = -\frac{11}{4}$

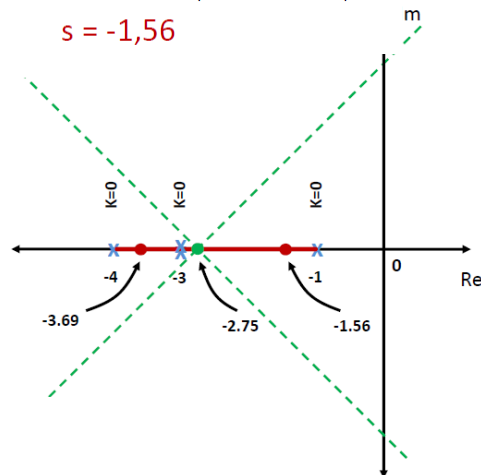
ADIM 6: kök yer eğrisinin gerçek eksenden ayrılma noktası

$$1 + K \frac{1}{(s+1)(s+3)^2(s+4)} = 0 \quad \text{ise} \quad K = -(s^4 + 11s^3 + 43s^2 + 69s + 36)$$

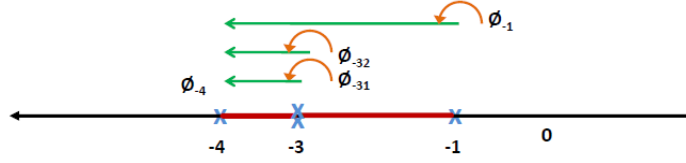
$$\frac{dK}{ds} = 0 \quad \text{'dan} \quad \begin{array}{ll} s_1 = -3,69 & s = -3,69 \\ s_2 = -3,00 & \text{Olamaz! (kutbun kendisi)} \\ s_3 = -1,56 & s = -1,56 \end{array}$$

asimptot açıları $\alpha = \pm 45^\circ, \pm 135^\circ$
asimptot kesme noktası: -2,75

eğrinin gerçek eksenden ayrılma noktaları: -3,69 ve -1,56

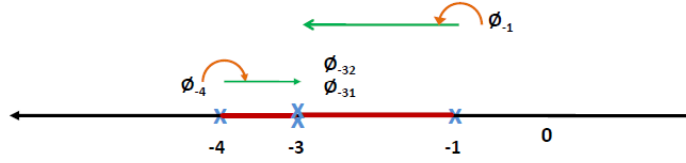


ADIM 7: kök yer eğrisinin kutuplardan ayrılma açıları

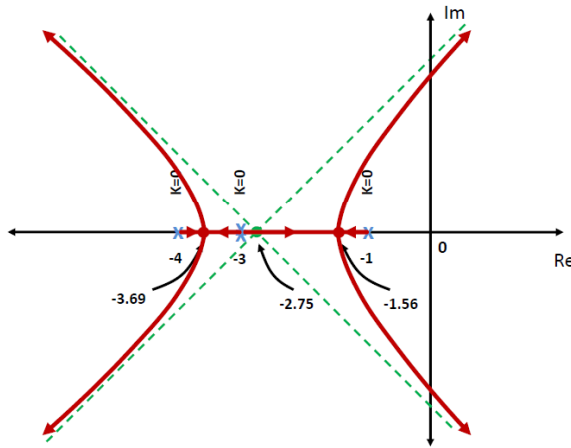


$\phi_{-1} + \phi_{-31} + \phi_{-32} + \phi_{-4} = -180$ ise $\phi_{-4} = 0^\circ$ bulunur.

Benzer şekilde $\phi_{-1} = -180^\circ$ olarak hesaplanır.

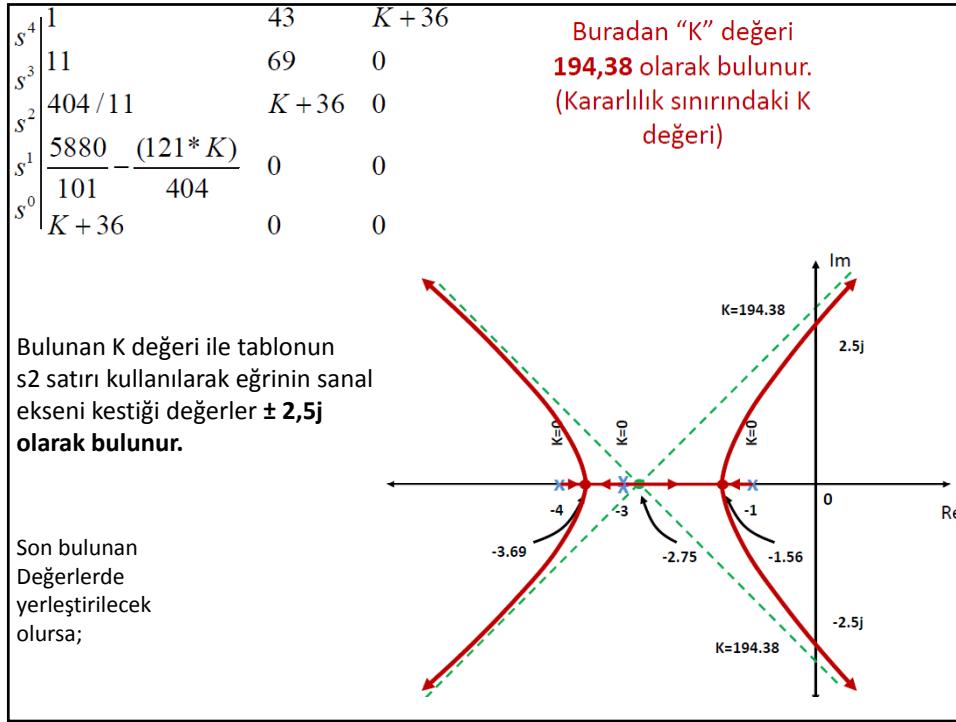


Katlı kutupların olduğu noktada kök yer eğrisi zıt yönlerde hareket eder. $\phi_{-31} = -180^\circ$ ise $\phi_{-32} = 0^\circ$ olur.



ADIM 8: kök yer eğrisinin sanal eksenini kestiği noktalar Sistemimizin özyapısal denklemi:

$$s^4 + 11s^3 + 43s^2 + 69s + 36 + K = 0$$



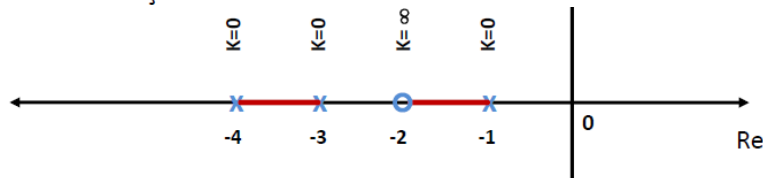
Transfer fonksiyonunda sıfır olması durumunda;

$$G(s) = \frac{(s + 2)}{(s + 1)(s + 3)(s + 4)} \quad \text{ve} \quad H(s) = 1$$

ADIM 1: Kök yer eğrisinin kol sayısı (açık döngü kutup sayısı) yine **3 adet** olacaktır.

ADIM 2: Sistemimizin **-1, -3 ve -4** noktalarında üç kutbu ($K=0$) ve **-2** noktasında bir sıfırı ($K=\infty$) vardır.

ADIM 3: Gerçek eksen üzerindeki kök yer eğrisi kolları **-4 ve -3** noktaları ile **-2 ve -1** noktaları arasında çıkmaktadır.



ADIM 4: $\alpha = \frac{180(2k+1)}{n-m}$ $n=3$ ve $m=1$ için $\alpha = 90(2k+1)$

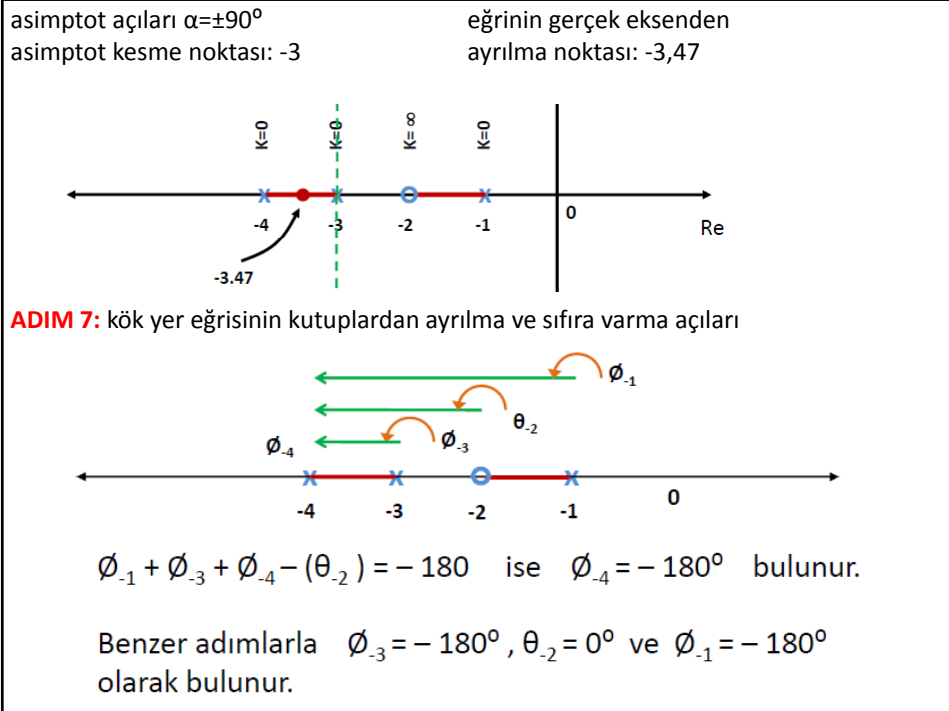
$k=0$ için $\alpha=90$, $k=1$ için $\alpha=270$ olur.

ADIM 5: $\sigma = \frac{\sum p_i - \sum z_q}{n-m}$ ise $\sigma = \frac{-1-3-4-(-2)}{3-1} = -3$

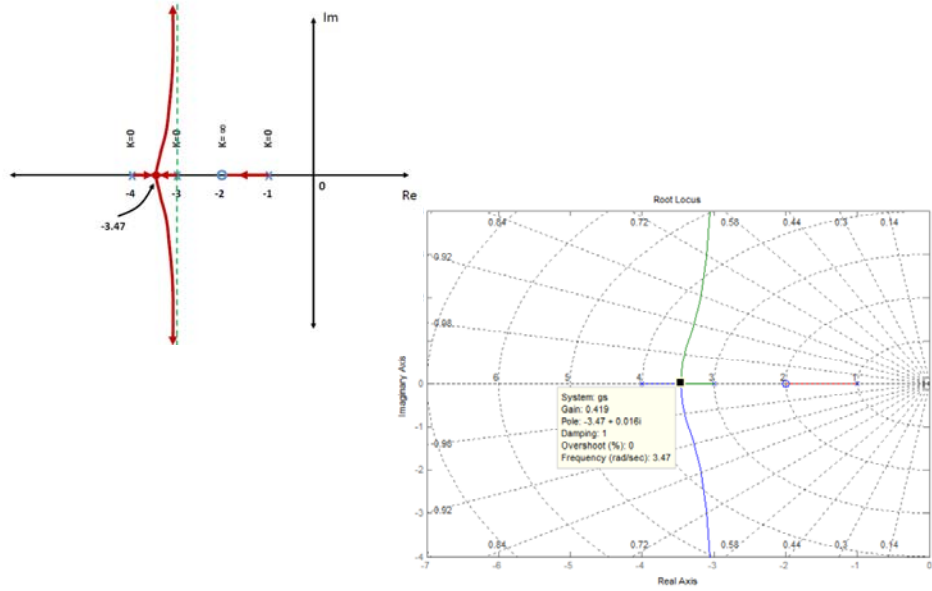
ADIM 6: kök yer eğrisinin gerçek eksen den ayrılma noktası

$1 + K \frac{(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+4)} = 0$ ise $K = -\frac{(s^3 + 8s^2 + 19s + 12)}{(s+2)}$

$\frac{dK}{ds} = 0$ 'dan $s_1 = -3,47$ $s = -3,47$
 $s_{2,3} = -1,77 \pm 0,79j$ Olamaz!



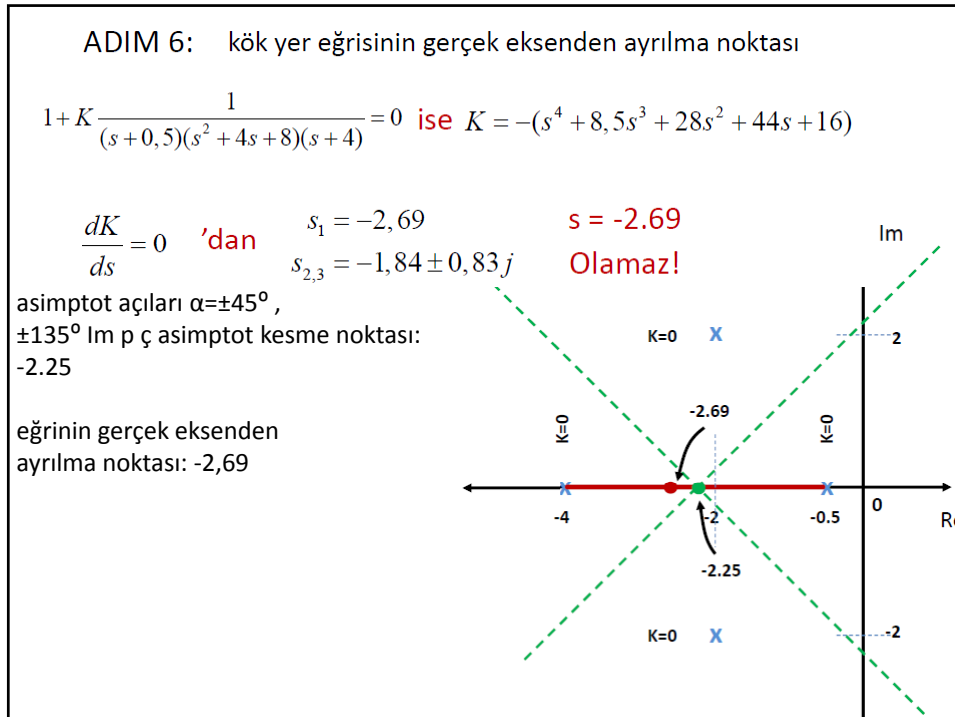
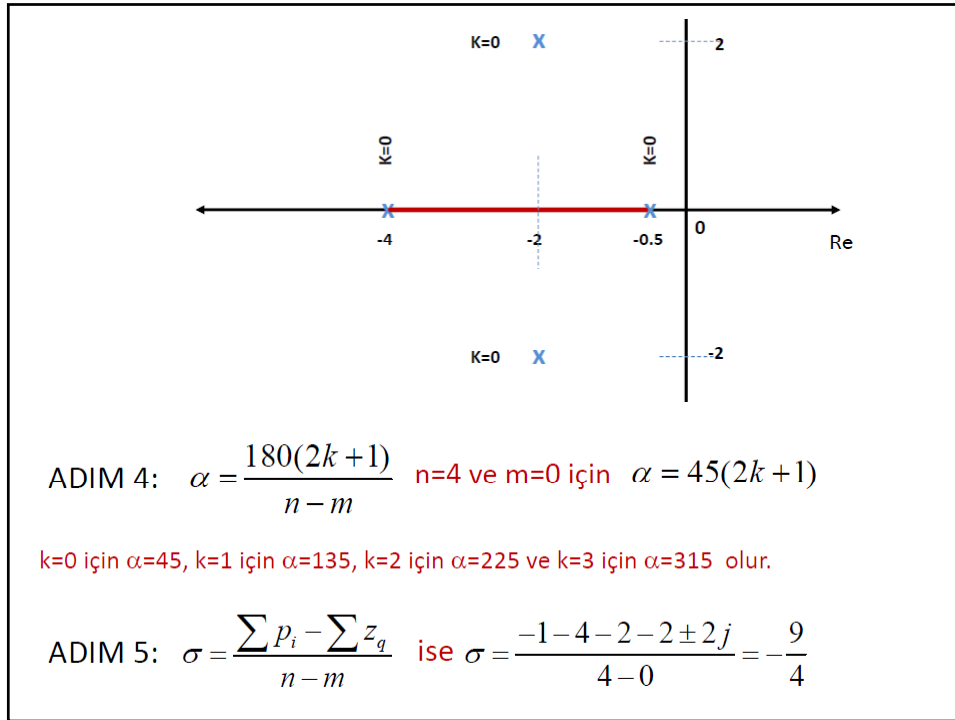
ADIM 8: kök yer eğrisinin sanal eksenini kesmediğinden dolayı bu noktaların değeri ve “K” değeri bulunmaz.



Transfer fonksiyonunda karmaşık kutup olması durumunda;

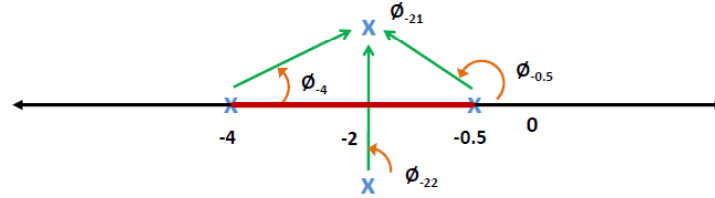
$$G(s) = \frac{1}{(s+0,5)(s^2 + 4s + 8)(s+4)} \quad \text{ve} \quad H(s) = 1$$

- ADIM 1: Kök yer eğrisinin kol sayısı (açık döngü kutup sayısı) yine **4 adet** olacaktır.
- ADIM 2: Sistemin **-0.5** ve **-4** noktalarında tekil, **$(-2 \pm 2j)$** noktalarında karmaşık olmak üzere 4 kutbu (K=0) vardır.
- ADIM 3: Gerçek eksen üzerinde sadece **-4** ve **-0.5** noktaları kök yer eğrisi kolu vardır. Bu tespit yapılırken karmaşık kutup ve sıfırlar hesaba dahil edilmezler.



ADIM 7: kök yer eğrisinin kutuplardan ayrılma açıları

$\phi_{-0.5} + \phi_{-4} + \phi_{-21} + \phi_{-22} = -180$ açı kuralından $\phi_{-0.5} = -180^\circ$
ve $\phi_{-4} = 0^\circ$ bulunur. (karmaşık kökler hesaba katılmıyor)



$\phi_{-0.5} + \phi_{-4} + \phi_{-21} + \phi_{-22} = -180$ açı kuralından;

$$[180 - \text{Arctan}(2/1.5)] + \text{Arctan}(2/2) + \phi_{-21} + \text{Arctan}(4/0) = -180$$

$$\phi_{-21} + 126.87 + 45 + 90 = -180 \text{ ise } \phi_{-21} = -81.87^\circ$$

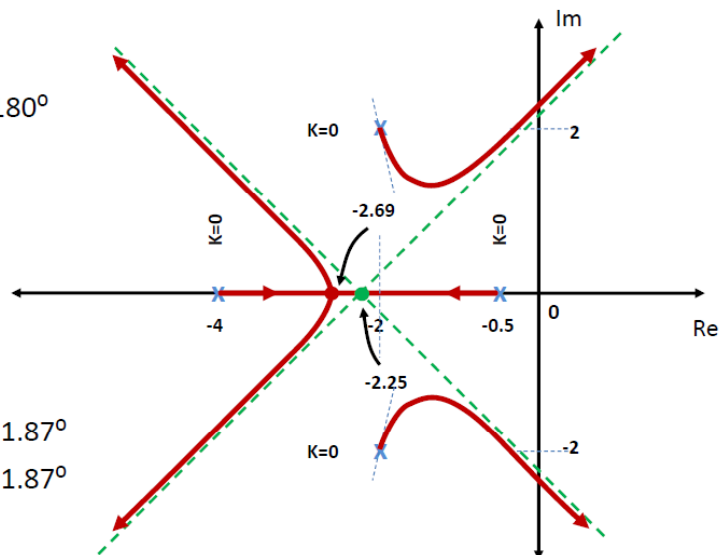
$$\phi_{-22} = +81.87^\circ$$

$$\phi_{-0.5} = -180^\circ$$

$$\phi_{-4} = 0^\circ$$

$$\phi_{-21} = -81.87^\circ$$

$$\phi_{-22} = +81.87^\circ$$



ADIM 8: kök yer eğrisinin sanal eksenini kestiği noktalar

Sistemimizin özyapısal denklemi:

$$s^4 + 8,5s^3 + 28s^2 + 44s + 16 + K = 0$$

s^4	1	28	$K + 16$
s^3	$17/2$	44	0
s^2	$388/17$	$K + 16$	0
s^1	$\frac{3690}{97} - \frac{(289 * K)}{776}$	0	0
s^0	$K + 16$	0	0

Buradan "K" değeri
102,15 olarak bulunur.
(Kararlılık sınırındaki K
değeri)

Bulunan K değeri ile tablonun s^2 satırı kullanılarak eğrinin sanal eksenini kestiği değerler $\pm 2,28j$ olarak bulunur.

Son bulunan
değerlerde
yerleştirilecek
olursa;

