

Fakülte No:

Adı ve Soyadı:

Bölüm:

İmza:

1.)

$$(x + y + 3)^2 y' = 2(y + 1)^2$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz?

2.)

$$x^2 y' + xy + \sqrt{y} = 0$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

3.)

$$\frac{x^2}{c} + y^2 = \frac{1}{c-1}$$

ile verilen bir parametrelili elips ailesinin yörüngelerinin kendine dik olduğunu gösteriniz.

4.)

$$yy'' + y'^2 + 2y^2 = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1/2$$

başlangıç değeri probleminin çözümünü bulunuz.

5.)

$$y''' - 3y' + 2y = e^{-2x}(x + \sin x)$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

YANITLAR:

ÇÖZÜMLER:

1.) Denklem $x = X + h$, $y = Y + k$ ötelemesi ile homojen yapılabilir. (h, k) çifti

$$h + k = -3, \quad k + 1 = 0$$

sisteminden $h = -2$, $k = -1$ olarak bulunur. Bu dönüşümle homojen denklem

$$Y' = 2\left(\frac{Y}{X+Y}\right)^2$$

dir. $Y = XU$ dönüşümü ile

$$XU' + U = 2\left(\frac{U}{1+U}\right)^2$$

ve değişkenleri ayırarak

$$XU' = -\frac{U(1+U^2)}{(1+U)^2} \Rightarrow \frac{dX}{X} + \frac{dU}{U} + 2\frac{dU}{1+U^2} = 0$$

ve integre ederek

$$\ln UX + 2 \arctan U = C$$

buluruz. İlk değişkenlere dönerek genel çözümü

$$\ln(y+1) + 2 \arctan \frac{y+1}{x+2} = C$$

biçiminde elde ederiz.

2.) Denklem Bernoulli tipidir. $y = u^2$ dönüşümü ile lineerleştirilebilir. Dönüşüm uygulanırsa

$$2x^2uu' + xu^2 + u = 0 \Rightarrow u' + \frac{1}{2x}u = -\frac{1}{2x^2}$$

lineer denklemi bulunur. $\mu(x) = \sqrt{x}$ integrasyon çarpamı ile çarpılırsa

$$(\sqrt{x}u)' = -\frac{1}{2}x^{-3/2}$$

tam denklemi ve integre edilirse

$$\sqrt{x}u = x^{-1/2} + c \Rightarrow u = \sqrt{y} = \frac{1}{x}(1 + c\sqrt{x})$$

veya

$$y = \frac{1}{x^2}(1 + c\sqrt{x})^2$$

genel çözümü bulunur. $u = 0$ ise $y = 0$ trivial çözümü verir.

3.) Elips ailesi türetilirse

$$\frac{x}{c} + yy' = 0 \quad \Rightarrow \quad c = -\frac{x}{yy'}$$

buluruz.

$$c - 1 = -\frac{x + yy'}{yy'}$$

olduğu dikkate alınır ve c parametresi yok edilirse elips ailesinin diferansiyel denklemi

$$(y - xy')(x + yy') = y'$$

olarak bulunur. Dik yörüngelerinin denklemini bulmak için $y' \rightarrow -1/y'$ dönüşümü yapalım.

$$(y + \frac{x}{y'})(x - \frac{y}{y'}) = -\frac{1}{y'}$$

veya düzenleyerek yine elips ailesinin denklemini elde ederiz. Yani, bu ailenin üyeleri birbirini dik olarak kesecektir.

4.) Denklem y ve türevlerine göre homojen olduğundan $y' = uy$ dönüşümü ile mertebesini düşürebiliriz. Dönüşüm uygulanırsa birinci mertebe

$$u' + 2(u^2 + 1) = 0$$

denklemini, değişkenleri ayrılır ve integre edilirse

$$\frac{du}{u^2 + 1} + 2dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \arctan u + 2x = c_1$$

bulunur. $y' = uy$ bağıntısına dönülürse

$$\frac{y'}{y} = \tan(c_1 - 2x) \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{y} = \tan(c_1 - 2x)dx$$

den integre ederek

$$\ln \frac{y}{c_2} = \frac{1}{2} \cos(c_1 - 2x)$$

ya da

$$y^2 = c_2^2 \cos(c_1 - 2x) = A \cos 2x + B \sin 2x$$

elde ederiz. Burada c_1, c_2 sabitleri yeniden tanımlanmıştır. $y(0) = 1$ koşulundan $A = 1$ bulunur. Çözüm türetilir ve $x = 0$ konursa

$$2y(0)y'(0) = 2B \Rightarrow B = 2$$

çıkar. Başlangıç değer probleminin çözümü ise

$$y = \sqrt{\cos 2x + 2 \sin 2x}$$

olur.

5.) Karakteristik denklem

$$F(\alpha) = \alpha^3 - 3\alpha + 2 = 0$$

dir. $\alpha = 1$ bu denklemin bir tamsayı kökü olduğundan (± 2 nin bir çarpanı) bu polinom $(\alpha - 1)$ ile bölünerek

$$F(\alpha) = (\alpha - 1)^2(\alpha + 2)$$

biçiminde çarpanlarına ayrılabilir. Homojen çözüm

$$y_h(x) = e^x(c_1 + c_2x) + c_3e^{-2x}$$

dir. Özel çözümü bulmak için $F(D)y = xe^{-2x}$ ve $F(D)y = e^{-2x} \sin x$ denklemlerini ayrı ayrı düşünelim. Birinci denklem için $y = ue^{-2x}$ dönüşümü yapalım. $F(D) = (D - 1)^2(D + 2)$ olduğundan kolayca

$$G(D)u = F(D - 2)u = D(D - 3)^2u = x$$

bulunur. $u = x(Ax + B)$ çözümünü önerelim. A ve B belirsiz katsayıları

$$-12A + 9(2Ax + B) = x$$

den $A = 1/18$ ve $B = 2/27$ olarak bulunur.

İkinci denkleme karşılık

$$G(D)U = e^{ix}$$

kompleks denklemini düşünelim. $U = Ke^{ix}$ çözümü önerilirse K sabiti hemen bulunur:

$$K = \frac{1}{G(i)} = \frac{1}{6 + 8i} = \frac{3 - 4i}{50}.$$

Bizim ilgilendiğimiz özel çözüm

$$u = \Im(U) = \frac{1}{50}(-4 \cos x + 3 \sin x)$$

olacaktır.

Şüphesiz, doğrudan doğruya $u = C \cos x + D \sin x$ çözümü denklemde yazılarak belirsiz sabitler (C, D) bulunabilirdi.

Sonuç olarak genel çözüm

$$y = y_h + y_p = e^x(c_1 + c_2x) + c_3e^{-2x} + e^{-2x}\left[\frac{1}{18}x^2 + \frac{2}{27}x + \frac{1}{50}(-4\cos x + 3\sin x)\right]$$

dir.