

Fakülte No:

Adı ve Soyadı:

Bölüm:

İmza:

1.)

a)

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

diferansiyel denkleminin $\mu = \mu(xy)$ biçiminde bir integrasyon çarpanı olması için P ve Q fonksiyonlarının sağlaması gereken bağıntıyı bulunuz.

b)

$$(y - xy^2)dx + (x + x^2y)dy = 0$$

diferansiyel denkleminin bir integrasyon çarpanını bularak çözümünü elde ediniz.

c) $u = xy$ dönüşümü uygulayarak b) deki denklemi integre ediniz.

2.)

a) $x^2 = 4c(y + c)$ eğri ailesinin dik yörüngelerini belirleyiniz.

b) Üzerindeki herhangi bir noktadan çizilen teğetin y ekseninden ayırdığı parçası, orijine uzaklığına eşit olan eğrileri belirleyiniz.

3.) $x - y = 2ap - ap^2$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz. Denklemin tekil çözümü var mıdır? Varsa, bu çözümü bulup geometrik yorumunu veriniz.

4.)

$$y^{(4)} + y''' - y'' + 2y' = 3x^2 + 1 + e^{-2x} + 2 \cos x$$

diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

YANITLAR:

1

Diferansiyel Denklemler Arasmanı
Cözümleri (15.7.2002)

1.) a) $\mu = \mu(xy)$ biçiminde bir int. çarpım varsa

$\frac{P_y - Q_x}{yQ - xP}$ oran xy 'nin bir fonksiyonu olmalıdır.

yani $P_y - Q_x / (yQ - xP) = f(xy)$ sağlanmalıdır.

b)
$$f(x) = \frac{(1-2xy) - (1+2xy)}{xy(1+xy) - xy(1-xy)} = -\frac{2}{xy} = -\frac{2}{x} \Rightarrow \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = -\frac{2}{x}$$

$$\mu(x) = (xy)^{-2} \text{ bulunur.}$$

Denklem μ ile çarpılınca: $\frac{ydx + xdy}{x^2y^2} + \frac{dy}{y} - \frac{dx}{x} = 0$

tam denklemini elde edilir. Birinci terim $\frac{d(xy)}{x^2y^2}$ olarak

ifade edilirse, integre ederek

$$-\frac{1}{xy} + \ln \frac{y}{x} = C$$

genel çözümü bulunur.

c) Dif. denklemini $y' = \frac{y(xy-1)}{x(xy+1)}$ biçiminde yazalım

$$xy = u \Rightarrow xy' + y = u' \Rightarrow y' = \frac{u' - y}{x} = \frac{u(u-1)}{x^2(u+1)} \Rightarrow$$

$$u' = y \left[1 + \frac{u-1}{u+1} \right] = \frac{y}{x} \frac{2u}{u+1} \quad \text{değişkenleri ayrılabilir Denk.}$$

$$\int \frac{u+1}{u^2} du = 2 \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln u - \frac{1}{u} = 2 \ln x + C$$

veya yine $-\frac{1}{xy} + \ln \frac{y}{x} = C$

çözümü elde edilir.

2.) a) $x^2 = 4c(y+c)$ eğri ailesinin dif denklemini bulalım:

$$2x = 4cy' \Rightarrow c = x/2y' ; c \text{ yok ediliirse}$$

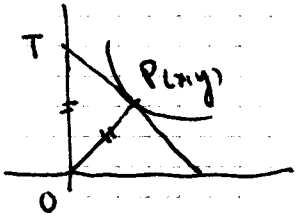
$$x^2 = 4 \frac{x}{2y'} \left(y + \frac{x}{2y'} \right) \Rightarrow x^2 y'^2 = x^2 + 2xyy'$$

Dik yözünge denklemini $y' \rightarrow -\frac{1}{y'}$ yazarak bulunur:

$$x^2 \left(\frac{1}{y'^2} \right) = x^2 - \frac{2xy}{y'} \Rightarrow x^2 y'^2 = x^2 + 2xyy'$$

Yani, verilen eğri ailesi kendini dik olarak keser.

b) $P(x,y)$ deki teğet doğrusu: $Y-y = y'(X-x)$.



$$X=0 \text{ için } Y=|OT|=y-xy', \quad |OP| = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$|OT|^2 = |OP|^2 \Rightarrow (y-xy')^2 = x^2+y^2$$

Düzenlenirse, $x^2 y'^2 = x^2 + 2xyy'$ olur. O halde, verilen koşulu sağlayan eğriler a) daki $x^2 = 4c(y+c)$ ailesi olur.

3.) Denklemin x' göre türetilebilir:

$$1-p = 2ap'(1-p) \Rightarrow (1-p)(1-2ap') = 0$$

$$(i) \quad p' = \frac{1}{2a} \Rightarrow p = \frac{x}{2a} + C ; p \text{ yok ediliirse}$$

$$x-y = 2a \left(\frac{x}{2a} + C \right) - a \left(\frac{x^2}{4a^2} + \frac{Cx}{a} + C^2 \right) \Rightarrow$$

$$(x+C)^2 = 4a(y+C) \quad \text{genel çözümü bulunur.}$$

(ii) $p=1$ için $x-y=a$ tekil çözümü verir.

Bu çözüm, genel çözümün zarfıdır.

$$4.) \quad F(\alpha) = \alpha(\alpha^3 + \alpha^2 - \alpha + 2) = \alpha(\alpha+2)(\alpha^2 - \alpha + 1) = 0$$

Karakteristik
Denklemin

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = -2, \quad \alpha_{3,4} = \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y_h = c_1 + c_2 e^{-2x} + e^{\frac{x}{2}} \left(c_3 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} x + c_4 \sin \frac{\sqrt{3}}{2} x \right)$$

$$L(y) = F(D)y = D(D+2)(D^2 - D + 1)y = \frac{1}{2} 3x^2 + 1 + e^{-2x} + 2 \cos x$$

$$Ly = f_1 = \frac{3}{2}x^2 + 1, \quad Ly_2 = e^{-2x}, \quad Ly_3 = 2 \cos x$$

denklemlerinin özel çözümlerini bulalım

$$(i) \quad y_{1,p} = x(Ax^2 + Bx + C), \quad y_1' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad y_1'' = 6Ax + 2B,$$

$$6A - (6Ax + 2B) + 2(3Ax^2 + 2Bx + C) = \frac{3}{2}x^2 + 1$$

$$A = \frac{1}{2}, \quad 4B - 6A = 0 \Rightarrow B = \frac{3}{4}; \quad 6A - 2B + 2C = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{4}$$

$$(ii) \quad y_2 = Ax e^{-2x} \quad (F(-2) = 0) \quad \text{veya} \quad y_2 = u(x) e^{-2x} \quad \text{dönüşümü}$$

$$\text{ile} \quad F(D-2)u = 1 \Rightarrow D(D^3 - 7D^2 + 17D - 14)u = 1 \Rightarrow u = -\frac{x}{14}$$

$$(iii) \quad y_3 = A \cos x + B \sin x \quad \text{veya}$$

$$y_3 = \frac{1}{F(D)} \cos x = \frac{2}{-D(D^2-1)} \cos x = \frac{2}{D+2} \cos x = \frac{2(D-2)}{D^2-4} \cos x$$

$$= -\frac{2}{5} (-2 \cos x - \sin x)$$

$$\text{Sonuç:} \quad y_p = y_1 + y_2 + y_3 = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{4}x^2 - \frac{x}{4} - \frac{x}{14} e^{-2x} + \frac{2}{5} (2 \cos x + \sin x)$$

$$y = y_h + y_p \quad \text{genel çözüm}$$