

2006-2007 Eğitim- Öğretim Yılı Güz Dönemi
Diferansiyel Denklemler Çalışma Soruları 2

1) $(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz

2) $x\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

3) $y'' + 6y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz ve diferansiyel denklemin çözümlerinin temel cümlesi olup olmadığını araştırınız.

4) $y'' + 3y' + 2y = 0$ $y(0) = 2$ $y'(0) = 1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

5) $y'' - 7y' + 10y = 6t + 8e^{2t}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

6) $y'' + 7y' + 12y = \sin 2x + e^{-3x} + 4$ diferansiyel denklemini çözünüz.

7) $y'' - 5y' + 4y = -4(x^2 + 1)e^{3x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

8) $y'' + y = \sin x$ diferansiyel denklemini parametrelerin değişimi metodunu kullanarak çözünüz

9) $(2-t)y''' + (2t-3)y'' - ty' + y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü $y_1(t) = e^t$ olduğuna göre, mertebe düşürme metodunu kullanarak $y_2(t)$ yi hesaplayınız.

10) $y''' + y' = \frac{1}{\sin x}$ $0 < x < \pi$ diferansiyel denklemini parametrelerin değişimi metodunu kullanarak çözünüz

11) $y''' - 4y'' + y' + 6y = \sin 4x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü belirsiz katsayılar metodunu kullanarak bulunuz.

12) $y''' - 2y'' + 17 = 8 + e^{2x} \cos 5x + x^2 e^x \sin 4x + (x+1)$ diferansiyel denkleminin homojen kısmın çözümünü elde ediniz. Sağ taraf için belirsiz katsayılar yöntemiyle özel çözümünü katsayıları hesaplamadan çözünüz

SORU) $(1+x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + (\frac{dy}{dx})^2 + 1 = 0$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{(1+x^2)} \left(\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 \right) \quad y'' = f(x, y') \text{ tipi}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = p \quad y'' = \frac{dp}{dx} \text{ ifadeleri dif. denklemde yerlerine konulursa}$$

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{1}{(1+x^2)} (p^2 + 1) \quad \frac{dp}{(p^2 + 1)} = -\frac{1}{(1+x^2)} dx$$

$$\text{Arctanp} = -\text{Arctanx}/\text{arctanc} \quad p = -x/c$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = p \quad \text{idi.} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{c} \quad y = -\frac{x^2}{2c} + c_1$$

Soru2) $x \frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

Çözüm:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx} \right)^2}}{x} \quad y'' = f(x, y') \text{ tipi}$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = p \quad y'' = \frac{dp}{dx} \text{ ifadeleri dif. denklemde yerlerine konulursa}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{\sqrt{1 + p^2}}{x} \quad \frac{dx}{x} = \frac{dp}{\sqrt{1 + p^2}}$$

Hatırlatma: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \ln \left[x + \sqrt{a^2 + x^2} \right]$

$\ln x + \ln c = \ln(p + \sqrt{1 + p^2}) \rightarrow cx = p + \sqrt{1 + p^2} \rightarrow cx - p = \sqrt{1 + p^2}$ 2 tarafın karesi alınırsa

$c^2 x^2 - 2cxp + p^2 = 1 + p^2 \rightarrow c^2 x^2 - 1 = 2cxp \rightarrow p = \frac{c^2 x^2 - 1}{2cx} = \frac{cx}{2} - \frac{1}{2cx}$

$p = \frac{dy}{dx}$ idi. $\rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{cx}{2} - \frac{1}{2cx} \rightarrow dy = \frac{cx}{2} - \frac{1}{2cx} dx$

$\rightarrow y = \frac{cx^2}{4} - \frac{\ln x}{2c} + c_1$

SORU3) $y'' + 6y = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz ve diferansiyel denklemin çözümlerinin temel cümlesi olup olmadığını araştırınız.

$y'' = r^2$

$y' = r$ yazılarak $r^2 + 6 = 0$ karakteristik denklemden kompleks kök

$y = 1 \quad \alpha = -\frac{b}{2a} = 0 \quad \beta = \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} = \sqrt{6}$

$r_1 = 0 + i\sqrt{6} \quad r_2 = 0 - i\sqrt{6}$

$y_h = e^{\alpha x} (c_2 \cos \beta x + c_3 \sin \beta x)$

$y_h = (c_1 \cos \sqrt{6} x + c_2 \sin \sqrt{6} x)$

$W = \begin{pmatrix} \cos \sqrt{6} x & \sin \sqrt{6} x \\ -\sqrt{6} \sin \sqrt{6} x & \sqrt{6} \cos \sqrt{6} x \end{pmatrix} = \sqrt{6} \neq 0$ çözümlerin temel cümlesidir.

4) $y'' + 3y' + 2y = 0 \quad y(0) = 2 \quad y'(0) = 1$ başlangıç değer problemini çözünüz.

$y'' + 3y' + 2y = 0$ ile homojen çözüm yapılarak

$y'' = r^2$

$y' = r$ yazılarak $r^2 + 3r + 2 = 0$ karakteristik denklemden

$y = 1$

$$r^2 + 3r + 2 = 0 \quad r_1 = -1 \quad r_2 = -2 \quad \text{2 farklı reel kök}$$

$$y_{\text{homogen}} = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y' = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}$$

$$y(0) = 2 \text{ için}$$

$$c_1 + c_2 = 2$$

$$y'(0) = 1 \text{ için}$$

$$-c_1 - 2c_2 = 1$$

$$c_1 = 5 \quad c_2 = -3$$

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$$

$$y = 5e^{-x} - 3e^{-2x}$$

Soru5) $y'' - 7y' + 10y = 6t + 8e^{2t}$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Çözüm:

önce denklem 0 a eşitlenerek homojen kısmın çözümü bulunur.

$$r^2 - 7r + 10 = 0 \quad \text{karakteristik denklem}$$

$$(r-2)(r-5) = 0 \quad r_1 = 2, \quad r_2 = 5$$

$$y_{\text{homogen}} = c_1 e^{2t} + c_2 e^{5t}$$

Eşitliğin sağ tarafı doğru denklemi ve üstel fonksiyonun toplamı olduğundan özel çözüm olarak doğru denklemi ve üstel fonksiyon için ayrı ayrı özel çözümler seçilir.

0 karakteristik denklemin kökü olmadığından

$y_{\text{özell}} = At + B$ seçilerek türevler (y' ve y'') alınır, verilen denklemden yerlerine konularak katsayılar hesaplanır.

$$y' = A \quad y'' = 0$$

$$-7A + 10(At + B) = 6t + 8e^{2t} \quad 10At + 10B - 7A = 6t$$

$$10At = 6t \quad A = 6/10 = 3/5$$

$$10B - 7A = 0 \quad B = 21/50$$

$$y_{\text{özell}} = 3/5t + 21/50$$

Verilen Üstel fonksiyonda ($8e^{2t}$) t nin katsayısı 2 karakteristik denklemin basit bir kökü olduğundan

$$y_{\text{özell2}} = tDe^{2t}$$

$$y' = 2tDe^{2t} + De^{2t}$$

$$y'' = 2De^{2t} + 4tDe^{2t} + 2De^{2t}$$

$$2De^{2t} + 4tDe^{2t} + 2De^{2t} - 7(2tDe^{2t} + De^{2t}) + 10tDe^{2t} = 8e^{2t}$$

$$4De^{2t} = 8e^{2t}$$

$$D=2$$

$$y_{\text{özel}2} = tDe^{2t} = 2te^{2t}$$

genel çözüm;

$$y_{\text{genel}} = y_{\text{homogen}} + y_{\text{özel}}$$

$$y_{\text{genel}} = c_1e^{2t} + c_2e^{5t} + 2te^{2t} + 3/5t + 21/50$$

Soru 6) $y'' + 7y' + 12y = \sin 2x + e^{-3x} + 4$ **diferansiyel denklemini çözünüz.**

Çözüm:

$y'' + 7y' + 12y = 0$ **ile homojen çözüm yapılarak**

$$y'' = r^2$$

$$y' = r \quad \text{yazılarak} \quad r^2 + 7r + 12 = 0 \quad \text{karakteristik denklemden}$$

$$y = 1$$

$$r^2 + 7r + 12 = 0 \quad r_1 = -3 \quad r_2 = -4 \quad \mathbf{2 \text{ farklı reel kök}}$$

$$y_{\text{homogen}} = c_1e^{-3x} + c_2e^{-4x}$$

bulunur.

Özel çözümler

Sin2x için

i2 karakteristik denklemin kökü olmadığından $y_{\text{özel}1} = A \cos 2x + B \sin 2x$

seçilerek

$$y_{\text{özel}1} = A \cos 2x + B \sin 2x$$

$$y'_{\text{özel}1} = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x$$

$$y''_{\text{özel}1} = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x$$

ile $\sin 2x(-14A + 8B) + \cos 2x(8A + 14B) = \sin 2x$

$$\begin{aligned} -14A + 8B &= 1 \\ 8A + 14B &= 0 \end{aligned}$$

$$A = -7/30, \quad B = 4/30$$

$$y_{\text{özel1}} = -\frac{7}{30} \cos 2x + \frac{4}{30} \sin 2x$$

e^{-3x} için özel çözüm

üstel fonksiyonda x 'in katsayısı (-3) , karakteristik denklemin kökü olduğundan

Ae^{-3x} seçilerek

$$y_{\text{özel2}} = Axe^{-3x}$$

$$y'_{\text{özel2}} = Ae^{-3x} - 3Axe^{-3x}$$

$$y''_{\text{özel2}} = -6Ae^{-3x} + 9Axe^{-3x} \quad \text{diferansiyel denklemden yerlerine konularak}$$

$Ae^{-3x} = e^{-3x}$ den $A=1$ ve

$$y_{\text{özel2}} = xe^{-3x}$$

bulunur.

Sabit sayı (4) için,

y ' ifade olduğundan sabit sayı y nin katsayısına oranlanır. $y_{\text{özel3}} = 4/12 = 1/3$

$$y_{\text{genel}} = y_h + y_{\text{özel1}} + y_{\text{özel2}} + y_{\text{özel3}}$$

$$y_{\text{genel}} = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{-4x} - \frac{7}{30} \cos 2x + \frac{4}{30} \sin 2x + xe^{-3x} + \frac{1}{3}$$

elde edilir.

7) $y'' - 5y' + 4y = -4(x^2 + 1)e^{3x}$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$$y'' = r^2$$

$$y' = r \quad \text{yazılarak} \quad r^2 - 5r + 4 = 0 \quad \text{karakteristik denklemden}$$

$$y = 1$$

$$r^2 - 5r + 4 = 0 \quad r_1 = 1 \quad r_2 = 4 \quad \text{2 farklı reel kök}$$

$$y_{\text{homojen}} = c_1 e^x + c_2 e^{4x}$$

üstel fonksiyonnda x in katsayısı olan 3 değeri karakteristik denklemin kökü olmadığından

$y_{\text{özel}} = (Ax^2 + Bx + C)e^{3x}$ seçilerek türevler alınır ve verilen diferansiyel denklemde yerlerine konarak A,B ve C katsayıları belirlenir.

$$-2(Ax^2 + Bx + C) + 2Ax + B + 2A = -4(x^2 + 1) \text{ den}$$

$$A=2, B=2 \text{ ve } C=5 \text{ elde edilir. } y_{\text{özel}} = (2x^2 + 2x + 5)e^{3x}$$

$$y_{\text{genel}} = y_h + y_{\text{özel}} = c_1 e^x + c_2 e^{4x} + (2x^2 + 2x + 5)e^{3x}$$

8) $y'' + y = \sin x$ diferansiyel denklemini parametrelerin değişimi metodunu kullanarak çözünüz

$y'' + y = 0$ denkleminin karakteristik denklemi $r^2 + 1 = 0$ ve kökleri $r = \pm i$ olup genel çözüm $y = e^{\alpha t} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ den

$$y = c_1 \cos x + c_2 \sin x$$

$W.u' = \varepsilon_n$ sistemini yazarsak

$$\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} u_1' \cos x + u_2' \sin x &= 0 & /* \sin x \\ -u_1' \sin x + u_2' \cos x &= \sin x & /* \cos x \text{ ile çarparsak} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_2' &= \sin x \cos x & u_2 &= -(\cos^2 x)/2 + K_2 \\ u_1 &= -\sin^2 x & u_1 &= -(x/2 - (\sin 2x)/4) + K_1 \end{aligned}$$

Hatırlatma: $\int \sin^2 x dx = x/2 - (\sin 2x)/4$

u_1, u_2 ($y = u_1 \cos x + u_2 \sin x$) yerlerine konarak yani ($Y = W.u$) ile

$$y_{\text{genel}} = K_1 \cos x + K_2 \sin x - (x/2) \cos x - ((\cos^2 x)/2) \sin x - (\sin 2x * \cos x)/4$$

9) $(2-t)y''' + (2t-3)y'' - ty' + y = 0$ diferansiyel denkleminin bir çözümü $y_1(t) = e^t$ olduğuna göre, mertebe düşürme metodunu kullanarak $y_2(t)$ yi hesaplayınız.

10) $y''' + y' = \frac{1}{\sin x}$ $0 < x < \pi$ diferansiyel denklemini çözünüz.

$$\begin{aligned} y''' &= r^3 \\ y'' &= r^2 \\ y' &= r \end{aligned} \quad \begin{aligned} &\text{yazılarak } r^3 + r = 0 \text{ karakteristik denklemden} \\ &r(r^2 + 1) = 0 \quad r_1 = 0 \quad r_{2,3} = 0 \pm i1 \text{ reel ve kompleks} \end{aligned}$$

$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + e^{\alpha x} (c_2 \cos \beta x + c_3 \sin \beta x)$$

$$y_h = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$$

Parametrelerin değişimi yöntemine göre;

$$y_{\text{özel}} = u_1 + u_2 \cos x + u_3 \sin x \quad \text{yazılarak}$$

$$u_1' + u_2' \cos x + u_3' \sin x = 0 \quad (1)$$

$$-u_2' \sin x + u_3' \cos x = 0 \quad (2)$$

$$-u_2' \cos x - u_3' \sin x = 1/\sin x \quad (3)$$

$$(1) \text{ ve } (3) \text{ den} \quad u_1' = \frac{1}{\sin x} \quad u_1 = -\ln(\csc x + \cot x)$$

$$(2) \text{ ve } (3) \text{ den} \quad u_3' = -1 \quad u_3 = -x$$

$$(2) \text{ den} \quad u_2' = u_3' \cot x = -\cot x = -\frac{\cos x}{\sin x} \quad u_2 = -\ln(\sin x)$$

$$y_{\text{özel}} = u_1 + u_2 \cos x + u_3 \sin x \quad \text{de yerlerine yazılarak}$$

$$y_{\text{özel}} = -\ln(\csc x + \cot x) - \cos x \ln \sin x - x \sin x$$

$$y_{\text{genel}} = y_h + y_{\text{özel}} = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x - \ln(\csc x + \cot x) - \cos x \ln \sin x - x \sin x$$

$$\text{Hatırlatma: } \int (1/\sin ax) dx = 1/a \ln(\csc(ax) + \cot(ax))$$

11) $y''' - 4y'' + y' + 6y = \sin 4x$ diferansiyel denkleminin genel çözümünü belirsiz katsayılar metodunu kullanarak bulunuz.

$$y''' = r^3$$

$$y'' = r^2$$

$$y' = r$$

yazılarak $r^3 - 4r^2 + r + 6 = 0$ karakteristik denklemden

$(r+1)(r^2 - 5r + 6) = 0$ $r_1 = -1, r_2 = 2, r_3 = 3$ **reel vefarklı 3 kök**

$$y_{\text{homojen}} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t}$$

sin4x için (sin βx de i4 karakteristik denklemin kökü olmadığından)

$y_{\text{özel}} = A \cos 4x + B \sin 4x$ olarak seçilir.

$$y' = -4A \sin 4x + 4B \cos 4x$$

$$y'' = -16A \cos 4x - 16B \sin 4x$$

$$y''' = 64A \sin 4x - 64B \cos 4x$$

ifadeleri verilen diferansiyel denklemde yerlerine konursa

$$A = 12/1565 ; B = 13/1565$$

$$y_{\text{özel}} = 12/1565 \cos 4x + 13/1565 \sin 4x$$

$$y_{\text{genel}} = y_{\text{homojen}} + y_{\text{özel}}$$

$$y_{\text{genel}} = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} + c_3 e^{3t} + 12/1565 \cos 4x + 13/1565 \sin 4x$$

12) $y''' - 2y'' + 17y' = 8 + e^{2x} \cos 5x + x^2 e^x \sin 4x + (x+1)$ diferansiyel denkleminin homojen kısmının çözümünü elde ediniz. Sağ taraf için belirsiz katsayılar yöntemiyle özel çözümünü katsayıları hesaplamadan çözünüz

$$y''' = r^3$$

$$y'' = r^2$$

$$y' = r$$

yazılarak $r^3 - 2r^2 + 17r = 0$ karakteristik denklemden

$r(r^2 - 2r + 17) = 0$ $r_1 = 0$ $r_{2,3} = 1 \pm i4$ **reel ve kompleks**

$$y_h = c_1 e^{r_1 x} + e^{\alpha x} (c_2 \cos \beta x + c_3 \sin \beta x)$$

$$y_h = c_1 + e^x (c_2 \cos 4x + c_3 \sin 4x)$$

8 için özel çözüm:

(0 karakteristik denklemin **BASİT** kökü olduğu için)

$$y_{\text{özel1}} = Ax$$

$e^{2x} \cos 5x$ için özel çözüm:

($e^{\alpha x} \cos \beta x$ de, $((\alpha \pm i\beta); (2 \pm i5))$ karakteristik denklemin **KÖKÜ OLMADIĞI** için)

$$y_{\text{özel2}} = e^{\alpha x} (B \cos \beta x + C \sin \beta x) = e^{2x} (B \cos 5x + C \sin 5x) \text{ olarak seçilir.}$$

$x^2 e^x \sin 4x$ için özel çözüm:

($x^n e^{\alpha x} \sin \beta x$ de, $((\alpha \pm i\beta); (1 \pm i4))$ karakteristik denklemin basit **KÖKÜ** olduğu için için)

$$y_{\text{özel3}} = x e^{\alpha x} \cos \beta x (Dx^2 + Fx + G) + e^{\alpha x} \sin \beta x (Hx^2 + Ix + J) \text{ olarak seçilir.}$$

$$y_{\text{özel3}} = x e^x \cos 4x (Dx^2 + Fx + G) + e^x \sin 4x (Hx^2 + Ix + J)$$

$x+1$ için özel çözüm:

((0 karakteristik denklemin **BASİT** kökü olduğu için)

$$y_{\text{özel4}} = x(Kx + L)$$

$$y_{\text{genel}} = y_h + y_{\text{özel1}} + y_{\text{özel2}} + y_{\text{özel3}} + y_{\text{özel4}}$$