

DİFERANSİYEL DENKLEMLER II
ARA SINAVI SORULARI (B Grubu) (28.04.2005)

SORU 1. $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$ ($t > 0$) Cauchy-Euler diferansiyel denkleminin genel çözümünü $t = e^x$ değişken dönüşümü ile bulunuz.

SORU 2. $(t^2 + 1)y'' + ty' - y = 0$ denkleminin genel çözümünü $t = 0$ noktası civarında *Taylor seri* çözümü yöntemiyle bulunuz ve yakınsaklık yarıçapını belirleyiniz.

SORU 3. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin tüm tekil noktalarını sınıflandırınız.

a) $t^2(t - 2)^2y'' + 5ty' + (t^2 - 4)y = 0$

b) $(t^2 - 9)^2y'' + (t + 3)y' + 2y = 0$

Süre: 100 dak. 1. Soru 30 Puan, 2. Soru 40 Puan, 3. Soru 30 Puan.

ÇÖZÜMLER (B Grubu) (28.04.2005)

B1. $t^2y'' - 3ty' + 4y = 0$, $(t > 0)$, $t = e^x$ değişken dönüşümü yapılır, $y(t) = y(e^x) = Y(x)$ yazılırsa,

$$\frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy(e^x)}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{1}{t} \frac{dY(x)}{dx}$$

ve

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t} \frac{dY(x)}{dx} \right) = -\frac{1}{t^2} \frac{dY(x)}{dx} + \frac{1}{t^2} \frac{d^2Y(x)}{dx^2}$$

bulunur. Bu değerler verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$\frac{d^2Y}{dx^2} - 4\frac{dY}{dx} + 4Y = 0$$

denklemi elde edilir. $Y(x) = e^{\lambda x}$ gibi bir çözümü olduğu varsayalım. Karakteristik polinomu,

$$F(\lambda) = (\lambda - 2)^2$$

ve karakteristik denklemin kökleri $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$ ve çözüm

$$Y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x}$$

dir. $x = \log t$ ters dönüşümüyle verilen denklemin genel çözümü,

$$y = y(t) = c_1 t^2 + c_2 t^2 \log t, (t > 0)$$

bulunur.

B2. $(t^2 + 1)y'' + ty' - y = 0$, $t = 0$ noktası denklemin bayağı noktasıdır.

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n \text{ biçiminde çözümünü arayalım. } y'(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1}, y''(t) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2}$$

$$(t^2 + 1) \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} + t \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^{n-1} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^n + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} + \sum_{n=1}^{\infty} n c_n t^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n t^n + 2c_2 + 6c_3 t + \sum_{n=4}^{\infty} n(n-1) c_n t^{n-2} + c_1 t + \sum_{n=2}^{\infty} n c_n t^n - c_0 - c_1 t - \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = 0$$

ve buradan,

$$-c_0 + 2c_2 + 6c_3 t + \sum_{n=2}^{\infty} \{(n^2 - 1)c_n + (n+2)(n+1)c_{n+2}\} t^n = 0$$

Sıfır fonksiyonunun seri açılımında tüm katsayılar sıfır olacağından, sol yandaki t^n nin katsayıları da sıfır olmalıdır. Bu nedenle, c_n katsayıları arasında

$$c_2 = \frac{1}{2} c_0, c_3 = 0 \quad \text{ve} \quad c_{n+2} = -\frac{n-1}{n+2} c_n (n \geq 2)$$

indirgeme bağıntısı elde edilir.

$$n = 2 \text{ için; } c_4 = -\frac{1}{4}c_2 = -\frac{1}{2 \cdot 4}c_0$$

$$n = 3 \text{ için; } c_5 = -\frac{2}{5}c_3 = 0$$

$$n = 4 \text{ için; } c_6 = -\frac{3}{6}c_4 = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}c_0$$

$$n = 5 \text{ için; } c_5 = -\frac{4}{7}c_5 = 0$$

⋮

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2k-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2k} c_0, (k \geq 2) \quad \text{ve} \quad c_{2k+1} = 0, (k \geq 1)$$

olur. Buna göre, verilen denklemin genel çözümü her t için yakınsak olan

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n} t^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} c_{2n+1} t^{2n+1} \\ &= c_0 + c_2 t^2 + \sum_{n=2}^{\infty} c_{2n} t^{2n} + c_1 t + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} t^{2n+1} \\ &= c_0 + \frac{1}{2} c_0 t^2 + c_0 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n} t^{2n} + c_1 t \\ &= c_0 y_1(t) + c_1 y_2(t) \end{aligned}$$

biçimindedir ve genel çözümün yakınsaklık yarıçapı $R = 1$ dir.

B3. a) $t^2(t-2)^2 y'' + 5ty' + (t^2-4)y = 0$ denklemi için,

$$p(t) = \frac{5t}{t^2(t-2)^2} \text{ ve } q(t) = \frac{t^2-4}{t^2(t-2)^2}$$

olur. Buna göre, $t = 0$ ve $t = 2$ tekil noktalardır. $t = 0$ için,

$$\lim_{t \rightarrow 0} tp(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t \frac{5t}{t^2(t-2)^2} = \frac{5}{4}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} t^2 q(t) = \lim_{t \rightarrow 0} t^2 \frac{t^2-4}{t^2(t-2)^2} = -1$$

olduğundan, $t = 0$ denklemin bir düzgün tekil noktasıdır. $t = 2$ için,

$$\lim_{t \rightarrow 2} (t-2)p(t) = \lim_{t \rightarrow 2} (t-2) \frac{5t}{t^2(t-2)^2} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow 2} (t-2)^2 q(t) = \lim_{t \rightarrow 2} (t-2)^2 \frac{t^2-4}{t^2(t-2)^2} = 0$$

olduğundan, $t = 2$ tekil noktası denklem için bir düzgün olmayan tekil noktadır.

b) $(t^2-9)^2 y'' + (t+3)y' + 2y = 0$ denklemi için,

$$p(t) = \frac{t+3}{(t^2-9)^2} \text{ ve } q(t) = \frac{2}{(t^2-9)^2}$$

olur. Buna göre, $t = 3$ ve $t = -3$ tekil noktalardır. $t = 3$ için,

$$\lim_{t \rightarrow 3} (t-3)p(t) = \lim_{t \rightarrow 3} (t-3) \frac{t+3}{(t^2-9)^2} = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow 3} (t-3)^2 q(t) = \lim_{t \rightarrow 3} (t-3)^2 \frac{2}{(t^2-9)^2} = \frac{1}{18}$$

olduğundan, $t = 3$ denklemin bir düzgün olmayan tekil noktasıdır. $t = -3$ için,

$$\lim_{t \rightarrow -3} (t+3)p(t) = \lim_{t \rightarrow -3} (t+3) \frac{t+3}{(t^2-9)^2} = \frac{1}{36}, \quad \lim_{t \rightarrow -3} (t+3)^2 q(t) = \lim_{t \rightarrow -3} (t+3)^2 \frac{2}{(t^2-9)^2} = \frac{1}{18}$$

olduğundan, $t = -3$ tekil noktası denklem için bir düzgün tekil noktadır.