



MAT232(Diferansiyel Denklemler II) - Çalışma Problemleri

1. $t^2y'' + 3ty' + 5y = 0$ *Cauchy-Euler* denkleminin genel çözümünü

i) $t = e^x$ dönüşümü ile,

ii) $y = t^r$ biçiminde çözümü olduğunu varsayarak bulunuz.

Genel Çözüm: $y = y(t) = \frac{1}{|t|} \{c_1 \cos(2 \log |t|) + c_2 \sin(2 \log |t|)\}$

2. Aşağıdaki *Cauchy-Euler* denklemlerinin genel çözümünü bulunuz ($t > 0$) :

(a) $t^2y'' + 2ty' - 6y = 0$ (b) $t^2y'' + 9ty' + 2y = 0$

(c) $t^2y'' - 5ty' + 25y = 0$ (d) $2t^2y'' - ty' + y = 0$

(e) $t^2y'' + 5ty' + 4y = 0$ (f) $2t^2y'' + ty' - y = 0$

Çözümler:

(a) $y(t) = c_1t^{-3} + c_2t^2$ (b) $y(t) = c_1t^{-4-\sqrt{14}} + c_2t^{-4+\sqrt{14}}$

(c) $y(t) = t^3\{c_1 \cos(4 \log t) + c_2 \sin(4 \log t)\}$ (d) $y(t) = c_1t^{1/2} + c_2t$

(e) $y(t) = t^{-2}\{c_1 + c_2 \log t\}$ (f) $y(t) = c_1t^{-1/2} + c_2t$

3. $t^2y'' - ty' + y = t \log t$ ($t > 0$) *Cauchy-Euler* denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Genel Çözüm: $y = y(t) = t\{c_1 + c_2 \log t + \frac{1}{6}(\log t)^3\}$

4. Aşağıdaki *Cauchy-Euler* diferansiyel denklemlerinin genel çözümünü bulunuz ($t > 0$) :

(a) $t^3y''' - 2t^2y'' + 8ty' - 8y = 0$ (b) $t^3y''' + ty' - y = 0$

Çözümler:

(a) $y(t) = c_1t + t^2\{c_2 \cos(2 \log t) + c_3 \sin(2 \log t)\}$ (b) $y(t) = c_1t + c_2t(\log t) + c_3t(\log t)^2$

5. $(t-1)^2 y'' + 8(t-1)y' + 12y = 0$ genel çözümünü bulunuz.

Genel Çözüm: $y = y(t) = \frac{c_1}{(t-1)^3} + \frac{c_2}{(t-1)^4}$

6. $t^2 y'' - 3ty' + 4y = t + t^2 \ln t$ *Cauchy-Euler* denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Genel Çözüm: $y = ct^2 + c_2 t^2 \ln t + t + t^2 \ln^3 t / 6.$

7. $t^2 y'' - 2ty' + 2y = \ln^2 t - \ln(t^2)$ *Cauchy-Euler* denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Genel Çözüm: $y = c_1 t + c_2 t^2 + \frac{1}{4} + \{\ln t + \ln^2 t\} / 2.$

8. $t^2 y'' - ty' + 4y = \cos(\ln(t)) + t \sin(\ln(t))$ *Cauchy-Euler* denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Genel Çözüm: $y = c_1 t \cos(\sqrt{3} \ln(t)) + c_2 t \sin(\sqrt{3} \ln(t)) + \frac{t \sin(\ln(t))}{2} + \frac{3 \cos(\ln(t)) - 2 \sin(\ln(t))}{13}$

9. $t^2 y'' + 5ty' + 5y = \frac{1}{t^3}$ ($t > 0$) *Cauchy-Euler* denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Genel Çözüm:

$$y = y(t) = \frac{1}{t^2} [c_1 \cos(\log t) + c_2 \sin(\log t)] + \frac{1}{2t^3}$$

10. $y' = 2ty$, $y(0) = 1$ denkleminin çözümünü $t = 0$ noktası civarında *Taylor seri* yöntemiyle bulunuz. Çözümün $y(t) = e^{t^2}$ olduğunu gösteriniz.

Genel Çözüm: $y = y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n \cdot (2n-1)(2n-3) \cdots 3}{(2n)!} t^{2n}$

11. $y'' - ty' = 0$, $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ denkleminin genel çözümünü $t = 1$ noktası civarında *Taylor seri* yöntemiyle bulunuz.

Genel Çözüm: $y = y(t) = (t-1) + \frac{1}{6}(t-1)^3 + \frac{1}{12}(t-1)^4 + \cdots$

12. $y'' + 4y = 0$ denkleminin genel çözümünü $t = 0$ noktası civarında *Taylor seri* yöntemiyle bulunuz.

Genel Çözüm:

$$y = y(t) = a_0 \cos(2t) + \frac{a_1}{2} \sin(2t)$$

13. $y'' - 2ty = 0$ denkleminin genel çözümünü $t = 0$ noktası civarında *Taylor seri* yöntemiyle bulunuz.

Genel Çözüm:

$$y = y(t) = a_0 \left\{ 1 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^6}{45} + \cdots \right\} + a_1 \left\{ t + \frac{t^4}{6} + \frac{t^7}{126} + \cdots \right\}$$

14. $y'' - 2ty' + y = 0$ denkleminin çözümünü $t = 0$ noktası civarında *Taylor seri* yöntemiyle bulunuz.

Genel Çözüm:

$$y = y(t) = a_0 \left\{ 1 - \frac{t^2}{2!} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-5)}{(2n)!} t^{2n} \right\} + a_1 \left\{ t + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}{(2n+1)!} t^{2n+1} \right\}$$

15. $y'' + 2ty' + 2y = 0$ denkleminin genel çözümünü $t = 0$ noktası civarında seri yöntemiyle bulunuz.

Genel Çözüm:

$$y = y(t) = a_0 \left\{ 1 - t^2 + \frac{1}{2}t^4 - \frac{1}{6}t^6 + \dots \right\} + a_1 \left\{ t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{4}{15}t^5 - \dots \right\} \quad (|t| < 1)$$

16. $(1-t)y'' + y = 0$ diferansiyel denkleminin $t = 0$ noktası civarında genel çözümünü *Taylor serisi* yöntemiyle bulunuz.

$$\text{Genel Çözüm: } y(t) = a_0 \left\{ 1 - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{24}t^4 - \dots \right\} + a_1 \left\{ t - \frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{12}t^4 - \dots \right\}$$

17. $J_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n}$ fonksiyonu $ty'' + y' + ty = 0$ diferansiyel denkleminde yerine yazarak , $J_0(t)$ fonksiyonun diferansiyel denklemin bir çözümü olduğunu gösteriniz.

18. $t^3y''' - 2t^2y'' + 4ty' - 4y = 0$ ($t > 0$) *Cauchy-Euler* denkleminin genel çözümünü bulunuz.

Genel Çözüm:

$$y = y(t) = c_1t + c_2t^2 + c_3t^2 \log t$$

19. $y'' - ty' - y = 0$ diferansiyel denkleminin $t = 0$ noktası civarında genel çözümünü *Taylor serisi* yöntemiyle bulunuz.

$$\text{Çözüm: } y = y(t) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{2^n n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n n!}{(2n+1)!} t^{2n+1}, |t| < \infty$$

20. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin tüm tekil noktalarını sınıflandırınız.

(a) $(1-t^2)y'' - 2ty' + \alpha(\alpha+1)y = 0$

(b) $2(t-2)^2ty'' + 2ty' + (t-2)y = 0$

(c) $(t - \frac{\pi}{2})^2y'' + (\cos t)y' + (\sin t)y = 0$

Çözüm: (a) $t = \pm 1$ noktaları düzgün tekil noktalardır.

(b) $t = 0$ noktaları düzgün tekil noktalardır. $t = 2$ noktaları düzgün olmayan tekil noktalardır.

(c) $t = \frac{\pi}{2}$ noktası düzgün tekil noktadır.

21. Aşağıdaki diferansiyel denklemlerin tüm tekil noktalarını sınıflandırınız.

(a) $t^2 y'' + (\sin t)y = 0$

(b) $y'' + (\ln t)y = 0$

(c) $(t^2 - 1)y'' + 2ty' + 6y = 0$

(d) $(t^2 + 1)y'' + 2ty' + 6y = 0$

(e) $t^2(t + 1)^2 y'' + (t^2 - 1)y' + 2y = 0$

(f) $(t^2 - 4)^2 y'' + (t - 2)y' + y = 0$

Çözüm:

(a) $t = 0$ noktası düzgün tekil nokta.

(b) $t \leq 0$ tüm noktalar tekil noktalardır. (düzgün tekil olmayan noktalar)

(c) $t = \pm 1$ noktaları tekil noktalardır.

(d) Tüm noktalar bayağı noktalardır.

(e) $t = 0$ ve $t = -1$ tekil noktalardır. $t = -1$ noktası düzgün, $t = 0$ noktası düzgün olmayan tekil noktadır.

(f) $t = \pm 2$ noktaları tekil noktalardır.

22. Aşağıdaki denklemler için verilen noktaların türlerini belirleyiniz.

(a) $t(t - 2)^2 y'' + ty' + y = 0$, $t = 0$

(b) $t(t - 2)^2 y'' + ty' + y = 0$, $t = 2$

(c) $(\sin t)y'' + (\cos t)y' + t^{-1}y = 0$, $t = 0$

(d) $(e^t - 1)y'' + ty' + y = 0$, $t = 0$

(e) $(1 - t^2)y'' + \frac{1}{\sin(t + 1)}y' + y = 0$, $t = -1$

(f) $t^3 y'' + (\sin t^2)y' + ty = 0$, $t = 0$

23. Aşağıdaki denklemlerin tekil noktalarını türleriyle belirleyiniz.

(a) $(t^5 - t^4 - 6t^3)y'' + t^2 y' + (t - 2)y = 0$

(b) $(t^2 - 3t)y'' + (t + 2)y' + y = 0$

(c) $(t^3 + t^2)y'' + (t^2 - 2t)y' + 4y = 0$

(d) $(t^4 - 2t^3 + t^2)y'' + 2(t - 1)y' + t^2 y = 0$

24. $t^2y'' + 4ty' + (t-4)y = 0$ ($t > 0$) denkleminin genel çözümünü $t = 0$ noktası civarında *Frobenius* yöntemiyle bulunuz.

Genel Çözüm: ($\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -4$)

$$\begin{aligned} y_1(t) &= t\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n t^n\} \\ y_2(t) &= ay_1(t) \ln t + t^{-4}\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n t^n\} \end{aligned}$$

25. $2ty'' - y' + 2y = 0$ denklemi için $t = 0$ noktasının *düzgün tekil nokta* olduğunu gösteriniz. Denklemin genel çözümünü *Frobenius* yöntemiyle bulunuz.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm: } y_1(t) &= t^{3/2}\{1 - \frac{2}{5}t + \frac{2}{35}t^2 - \frac{4}{945}t^3 + \dots\} \\ y_2(t) &= t^0\{1 + 2t - 2t^2 + \frac{4}{9}t^3 - \dots\} \end{aligned}$$

26. $ty'' + 2y' - ty = 0$ denklemi için $t = 0$ noktasının *düzgün tekil nokta* olduğunu gösteriniz. Denklemin genel çözümünü *Frobenius* yöntemiyle bulunuz.

Çözüm:

$$\begin{aligned} y(t) &= k_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n+1)!} + k_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n-1}}{(2n)!} \\ &= t^{-1}\{k_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} + k_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!}\} \\ &= t^{-1}\{k_1 \sinh t + k_2 \cosh t\} \end{aligned}$$

27. $4ty'' + 2y' + y = 0$ denklemi için $t = 0$ noktasının *düzgün tekil nokta* olduğunu gösteriniz. Denklemin genel çözümünü *Frobenius* yöntemiyle bulunuz.

$$\begin{aligned} \text{Çözüm: } y_1(t) &= k_1 t^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} t^{n+1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\sqrt{t})^{2n+1} = \sin \sqrt{t} \\ y_2(t) &= \cos \sqrt{t} \end{aligned}$$

28. Aşağıda verilen diferansiyel denklemlerin genel çözümlerini $t = 0$ noktası civarında *Frobenius* metodu ile bulunuz..

$$(a) \quad t^2y'' - ty' + (2t^2 + \frac{5}{9})y = 0$$

$$(b) \quad 2t^2y'' + ty' + (2t^2 - 3)y = 0$$

$$(c) \quad t^2y'' - ty' + (t^2 - 3)y = 0$$

$$(d) \quad ty'' + y' + 2y = 0$$

$$(e) \quad t^2y'' + (t^3 - t)y' - 3y = 0$$

29. Aşağıdaki denklemlerin $t = 0$ noktası civarında genel çözümünü *seri yöntemiyle* bulunuz.

(a) $2ty'' + y' + 2y = 0$

(b) $ty'' - y' + 64t^3y = 0$

(c) $4ty'' + 2y' - y = 0$

(d) $4t^2y'' - 4ty' + (3 - 4t^2)y = 0$

(e) $t^2y'' + 6ty' - (t^2 - 6)y = 0$

Çözüm: (a) $y_1(t) = \cos(2\sqrt{t})$ ve $y_2(t) = \sin(2\sqrt{t})$

(b) $y_1(t) = \cos(4t^2)$ ve $y_2(t) = \sin(4t^2)$

(c) $y_1(t) = \cosh \sqrt{t}$ ve $y_2(t) = \sinh \sqrt{t}$

(d) $y_1(t) = \sqrt{t} \cosh t$ ve $y_2(t) = \sqrt{t} \sinh t$

(e) $y_1(t) = \frac{\cosh t}{t^3}$ ve $y_2(t) = \frac{\sinh t}{t^3}$

30. J_p Bessel fonksiyonu olmak üzere,

$$\frac{d}{dt}\{t^p J_p(t)\} = t^p J_{p-1}(t)$$

$$\frac{d}{dt}\{t^{-p} J_p(t)\} = -t^{-p} J_{p+1}(t)$$

bağıntılarını kullanarak

$$J_{p+1}(t) = \frac{2p}{t} J_p(t) - J_{p-1}(t)$$

bağıntısını gösteriniz. $J_3(2t)$. fonksiyonunu $J_0(2t)$ ve $J_1(2t)$ cinsinden yazınız.