



T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
FEN EDEBİYAT FAKÜLTESİ
MATEMATİK BÖLÜMÜ

Adı. Soyadı :	1. Soru	2. Soru	3. Soru	4. Soru	TOPLAM
Numara :					

MAT232 DİFERANSİYEL DENKLEMLER II

FİNAL SINAVI SORULARI (B GRUBU) (07.06.2005)

SORU 1. $J_p(t)$, p . inci mertebeden I. tür Bessel fonksiyonu olmak üzere $\frac{d}{dt}\{t^n J_n(t)\} = t^n J_{n-1}(t)$ eşitliğini kullanarak aşağıdaki eşitliği ispatlayınız.

$$\int_0^2 t J_0(\lambda t) dt = \frac{2J_1(2\lambda)}{\lambda}, (\lambda \text{ sabit})$$

SORU 2. $x'_1 = -x_1 + 4x_2$
 $x'_2 = x_1 + 2x_2$ denklemlerini *sabitlerin değişimi yöntemiyle* çözünüz.

SORU 3. $\mathcal{L}\{\cos at \cosh at\}$ dönüşümünü hesaplayınız.

SORU 4. $y'' - 3y' + 2y = 4e^{2t}$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 5$ başlangıç değer problemini Laplace dönüşümünü kullanarak çözünüz.

MAT232 DİFERANSİYEL DENKLEMLER II
FİNAL SINAVI SORULARI ÇÖZÜMLERİ (07.06.2005)

B1. $\frac{d}{dt}\{t^n J_n(t)\} = t^n J_{n-1}(t)$ eşitliğinden, $\frac{d}{dt}\{t J_1(t)\} = t J_0(t)$ dir. t yerine λt yazılırsa,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d(\lambda t)}\{\lambda t J_1(\lambda t)\} &= \lambda t J_0(\lambda t) \\ \frac{\lambda}{\lambda} \frac{d}{dt}\{t J_1(\lambda t)\} &= \lambda t J_0(\lambda t) \\ \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dt}\{t J_1(\lambda t)\} &= t J_0(\lambda t)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}\int_0^2 t J_0(\lambda t) dt &= \frac{1}{\lambda} \int_0^2 \frac{d}{dt}\{t J_1(\lambda t)\} dt \\ &= \frac{1}{\lambda} \{t J_1(\lambda t)\} \Big|_0^2 \\ &= \frac{2 J_1(2\lambda)}{\lambda}\end{aligned}$$

B2.

$$x'_1 = -x_1 + 4x_2$$

$$x'_2 = x_1 + 2x_2$$

denklem sistemi için $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $|A| = -6$, $\dot{I}z.A = 1$ ve karakteristik denklem

$$\lambda^2 - \lambda - 6 = (\lambda - 3)(\lambda + 2) = 0$$

dır. Karakteristik denklemin kökleri, $\lambda_1 = -2$ ve $\lambda_2 = 3$ dir. Buna göre, $\psi_1(t) = c_1 e^{-2t}$ ve $\psi_2(t) = c_2 e^{3t}$ elde edilir. Sistemin birinci denkleminde $x_1 = \psi$ yazılırsa, $x_2 = \psi' - \psi$ olur. Bu bağımtıdan,

$$\begin{aligned}x_1 = \psi_1(t) = c_1 e^{-2t} \quad \text{için} \quad x_2 &= -\frac{c_1}{4} e^{-2t} \\ x_2 = \psi_2(t) = c_2 e^{3t} \quad \text{için} \quad x_2 &= c_2 e^{3t}\end{aligned}$$

bulunur. $c_1 = 4$ ve $c_2 = 1$ seçilirse, sistemin $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ doğrusal bağımsız çözümleri ve U temel matrisi

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 4e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 4e^{-2t} & e^{3t} \\ -e^{-2t} & e^{3t} \end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir. Buradan sistemin genel çözümü, k_1 ve k_2 keyfi sabitler olmak üzere, $\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned}x_1 &= 4k_1 e^{-2t} + k_2 e^{3t} \\ x_2 &= -k_1 e^{-2t} + k_2 e^{3t}\end{aligned}$$

bulunur.

B3. $f(t) = \cos at$ olsun. $F(s) = \mathcal{L}\{\cos at\} = \frac{s}{s^2 + a^2}$ dir. $\cosh at = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$ için, Laplace dönüşümünün doğrusallığından,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f(t) \cosh at\} &= \mathcal{L}\left\{\cos at \cdot \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{at} \cos at\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-at} \cos at\} \\ &= \frac{1}{2}F(s-a) + \frac{1}{2}F(s+a) \\ &= \frac{1}{2} \frac{s-a}{(s-a)^2 + a^2} + \frac{1}{2} \frac{s+a}{(s+a)^2 + a^2} \\ &= \frac{a(s^2 + 2a^2)}{s^4 + 4a^4}\end{aligned}$$

bulunur.

B4. Verilen denklemin her iki yanının Laplace dönüşümü alınırsa, Laplace dönüşümünün doğrusallığından

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{y''\} - 3\mathcal{L}\{y'\} + 2\mathcal{L}\{y\} &= 4\mathcal{L}\{e^{2t}\} \\ [s^2Y(s) - sy(0) - y'(0)] - 3[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) &= \frac{4}{s-2} \\ [s^2Y(s) + 3s - 5] - 3[sY(s) + 3] + 2Y(s) &= \frac{4}{s-2}\end{aligned}$$

ve buradan $Y(s) = \frac{4}{(s^2 - 3s + 2)(s - 2)} + \frac{14 - 3s}{s^2 - 3s + 2}$ olur. Basit kesirlere ayrılıştan,

$$Y(s) = \frac{-7}{s-1} + \frac{4}{s-2} + \frac{4}{(s-2)^2}$$

bulunur. Ters dönüşüm ile verilen denklemin genel çözümü,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} &= -7\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} + 4\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-2)^2}\right\} \\ y(t) &= -7e^t + 4e^{2t} + 4te^{2t}\end{aligned}$$

biçiminde bulunur.