

İKİNCİ DERECE DENKLEMLERİN SERİ ÇÖZÜMÜ

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \quad \text{kuvvet serisi}$$

1) Eğer bir kuvvet serisinin kısmi toplamlar dizisinin $\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^m a_n (x - x_0)^n$ limiti

var ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$ kuvvet serisine x noktasında **yakınsak** denir. Eğer kuvvet serisi bir x noktasında yakınsak değil ise, bu x noktasında **ıraksaktır**.

2) Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n|$ kuvvet serisi bir x noktasında yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$

kuvvet serisine '**mutlak yakınsak**' seri denir. Eğer bir seri mutlak yakınsak ise kendisinde yakınsaktır. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

3) Bir kuvvet serisinin mutlak yakınsaklığının araştırılmasında kullanılan testlerden birisi oran testidir.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} (x - x_0)^{n+1}}{a_n (x - x_0)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x - x_0| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L$$

limiti varsa, $L < 1$ koşulunu sağlayan x değerleri için yakınsaktır.

$L < 1$ için **Yakınsak**

$L > 1$ için **Iraksak** $L = \infty$ ise

$L = 1$ için **Testle karar verilemez.**

Örnek:

$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(x-2)^n$ serisi hangi x değerleri için yakınsaktır

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| (x - x_0) \right| \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x - 2| \left| \frac{n+1}{n} \right| = |x-2|$$

$|x-2| < 1$ için veya $-1 < x-2 < 1$

$1 < x < 3$ için yakınsak

$|x-2| > 1$ için ıraksaktır. $|x-2| = 1$ için $x=1$ ve $x=3$ için seri ayrıca incelenir

$x=1$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(1-2)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{2n+1} n$ sonlu bir değer

olmadığından ıraksaktır.

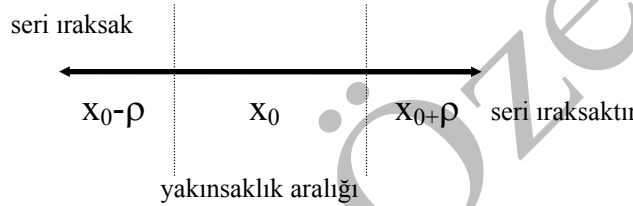
$x=3$ için $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n(3-2)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} n$ ıraksaktır.

4) Eğer $x=x_1$ noktasında $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisi yakınsak ise, bu takdirde $|x-x_0| < |x_1-x_0|$ için mutlak yakınsak ve eğer $x=x_1$ noktasında kuvvet serisi ıraksak ise $|x-x_0| > |x_1-x_0|$ içinde ıraksaktır.

5) Reel ve pozitif bir ρ sayısı için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisi $|x-x_0| < \rho$ için mutlak yakınsak ve $|x-x_0| > \rho$ için ıraksak ise ρ ya '**yakınsaklık yarıçapı**' denir.

-Bir kuvvet serisi sadece bir x_0 noktasında yakınsak ise **$\rho=0$ dır.**
 -Eğer kuvvet serisi her x için yakınsak ise **$\rho=\infty$ dır.**
 -Eğer $\rho>0$ olmak üzere $|x-x_0| < \rho$ aralığında seri yakınsak ise bu aralığa '**yakınsaklık aralığı**' denir.

$|x-x_0| = \rho$ yi sağlayan noktalarda seri yakınsakta, ıraksakta olabilir.



Örnek:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}; \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}}{(n+1)2^{n+1}} \cdot \frac{n2^n}{(x+1)^n} \right| = |x+1| \left| \frac{n}{(n+1)2} \right| = \frac{|x+1|}{2}$$

$$\frac{|x+1|}{2} < 1 \quad |x+1| < 2 \quad -2 < x+1 < 2 \quad -3 < x < 1$$

$$x=-3 \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3+1)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

seri yakınsaktır. Fakat mutlak yakınsak değildir. Bu nedenle seri şartlı yakınsaktır.

$$1/n > 1/(n+1) \quad a_n > a_{n+1} \quad \lim (1/n) = 0 \quad \text{ıraksak}$$

$$x=1 \text{ için } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2)^n}{n2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad \text{ıraksaktır.}$$

Mutlak yakınsak olduğu aralık $-3 < x < 1$ dir

Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ ve $\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ serileri sırası ile $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarına yakınsıyorlarsa

$|x-x_0| < \rho$ için $f(x) \neq g(x)$

$$6) f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) (x-x_0)^n$$

$$7) f(x) * g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n * \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-x_0)^n$$

$$f(x) / g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x-x_0)^n \text{ yakınsaktırlar.}$$

8) $|x-x_0| < \rho$ aralığındaki her x için f fonksiyonu sürekli ise, f' , f'' ,..... türevleri de bu aralıkta süreklidir.

$$y=f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+..... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

$$y'=f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+.....+(n-1)a_{n-1}(x-x_0)^{n-2}+n a_n(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-x_0)^{n-1}$$

$$y''=f''(x)=2a_2+.....+(n-1)(n-2)a_{n-1}(x-x_0)^{n-3}+.... = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n (x-x_0)^{n-2}$$

9) f fonksiyonu $x=x_0$ noktası civarında $a_n=(f^n(x_0))/n!$ ile

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!} (x-x_0)^n \text{ şeklinde yazılabiliyorsa buna Taylor serisi denir.}$$

10) Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-x_0)^n$ her x için sağlanıyorsa $a_n=b_n$ $n=1,2,3...$

Ayrıca her x için $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = 0$ ise $a_0=a_1=a_2=.....=a_n=0$ olur.

Eğer f fonksiyonu bir $x=x_0$ noktası civarında $\rho>0$ olmak üzere yakınsaklık yarıçapı ρ olan bir Taylor serisinin açılımı şeklinde yazılabiliyorsa, bu fonksiyona $x=x_0$ noktasında analitiktir denir.

Ayrıca 6.ve 7. maddeden f ve g fonksiyonları bir $x=x_0$ noktasında analitik iseler, bu takdirde $f(x) \pm g(x)$, $f(x) * g(x)$, $f(x) / g(x)$ koşulu ile, $x=x_0$ noktasında analitiktir.(x_0 noktası civarında türevi vardır).

İNDEKS DEĞİŞİMİ

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n (x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (n+2)(n+1)a_n (x-x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+4)(n+3)a_{n+2} (x-x_0)^n \quad \mathbf{n=n+2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_n x^{r+n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (r+n-1)a_{n-1} x^{r+n} \quad \mathbf{n=n-1}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{iki serinin birbirine eşit olması için}$$

$(n+1)a_{n+1}=a_n$ olmalıdır.

ADİ NOKTA, TEKİL NOKTA, DÜZGÜN TEKİL NOKTA VE DÜZGÜN OLMAYAN TEKİL NOKTA TANIMLARI

$P(x), Q(x), R(x)$ fonksiyonları polinom olmak üzere

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \quad (1)$$

veya $P(x) \neq 0$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Q(x)}{P(x)} \frac{dy}{dx} + \frac{R(x)}{P(x)} y = 0 \Rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

denklemini için

$P(x) \neq 0$ şartını sağlayan $x=x_0$ noktasına '*adi nokta*' denir,

$P(x)=0$ koşulunu sağlayan $x=x_0$ noktasına (1) denkleminin '*singular (tekil) noktası*' denir.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{sonlu} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{sonlu}$$

ise bu koşulları sağlayan x_0 noktasına

$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ denkleminin '**Regüler-Singüler Noktası**' denir.

Herhangi bir singüler noktası regüler-singüler nokta değilse bu noktaya

$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ denkleminin '**irregüler-singüler noktası**' denir

örnek:

1) $(x^2-4)y'' + 2xy' + ay = 0$ a sabit diferansiyel denkleminin adi ve tekil noktalarını belirleyiniz.

$$P(x) = (x^2-4) = 0 \quad x = \pm 2 \text{ tekil noktalar}$$

bunun dışında kalan diğer tüm noktalar adi noktalar.

2) $x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$ diferansiyel denkleminin adi ve tekil noktalarını belirleyiniz.

$$P(x) = 0 \text{ ile } (x^2=0 \quad x=0 \text{ tekil nokta, diğer tüm noktalar adi noktadır.})$$

BİR ADİ NOKTA CİVARINDA SERİ ÇÖZÜMLERİ

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \quad (1)$$

2.dereceden lineer denklemin çözümünü bulmak için yöntemler arıyoruz. (1) denkleminde örnek olarak,

- $x^2y'' + xy' + (x^2-v^2)y = 0$ v (sabit) (BESSEL DENKLEMİ)
- $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0$ α (sabit)(LEGENDRE DENKLEMİ)
- $y'' - \lambda xy = 0$ λ sabit (AIRY DENKLEMİ)
- $y'' - 2xy' + 2ny = 0$, n bir tamsayı (HERMITE DENKLEMİ)

(1) denklemindeki $P(x), Q(x), R(x)$ fonksiyonları polinom olarak ele alınmıştır(daha sonra bu fonksiyonlar değişik tiplerde ele alınacaktır).

$P(x) \neq 0$ şartını sağlayan $x=x_0$ noktasına '**adi nokta**' denir, bu x_0 noktasının uygun bir civarında $P(x) \neq 0$ olur ve (1) denklemini

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Q(x)}{P(x)} \frac{dy}{dx} + \frac{R(x)}{P(x)} y = 0 \Rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (2)$$

şeklinde yazılabilir.

$P(x_0)=0$ koşulunu sağlayan $x=x_0$ noktasına (1) denkleminin '*singular (tekil) noktası*' denir. (1) denkleminin çözümleri x_0 adi noktasının civarında

$$y = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (3)$$

şeklinde ararız. Bu serilerin $|x-x_0| < \rho$, $\rho > 0$ aralığında yakınsadığı farz edilmektedir. a_n katsayıları (3) denklemini ve bu denklemin y' ve y'' türevleri alınıp bunlar (1) nolu denkleminde yerlerine konularak bulunurlar

Örnek:

$$y'' + y = 0, \quad (4) \quad -\infty < x < \infty \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n \text{ şeklinde çözüünüz.}$$

çözüm:

Verilen denkleminde $P(x)=1, Q(x)=0, R(x)=1$ böylece her nokta adi noktadır. Burada $x_0=0$ alabiliriz. $x_0=0$ noktasının civarında kuvvet serine bakarsak

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n \quad (5)$$

$$y' = a_1 + 2a_2 x + \dots + (n-1)a_{n-1} x^{n-2} + na_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^{n-1} \quad (6)$$

$$y'' = 2a_2 + \dots + (n-1)(n-2)a_{n-1} x^{n-3} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \quad (7)$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n = 0$$

veya

$$\sum_{n=0}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n) x^n = 0 \text{ olur. Bu denklemin her } x \text{ için}$$

sağlanabilmesi için x in her mertebeden teriminin katsayısı '**0**' olmalıdır

$(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0$ yardımı ile $a_{n+2} = -\frac{a_n}{(n+2)(n+1)}$ elde edilir.

n yerine 0,1,2,3.... verilerek katsayılar belirlenir. bu denklem bir regürans bağıntısı(katsayılar arasındaki bağıntıyı verir)dır.

n=0 için $a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1}$ $a_3 = -\frac{a_1}{3 \cdot 2} = -\frac{a_1}{3!}$

$a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{a_0}{4!}$

$a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{a_1}{5!}$

a_0 ve a_1 e bağlıdır.

Çift ve tek katsayılar aşağıdaki şekilde

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2k!} \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!} \quad \text{yazabiliriz.}$$

katsayılar (5) denkleminde yerlerine konur

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots + a_n x^n$$

$$y = a_0 + a_1 x - \frac{a_0}{2!} x^2 - \frac{a_1}{3!} x^3 + \dots + \frac{(-1)^k a_0}{2k!} x^{2k} + \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!} x^{2k+1}$$

$$y = a_0 \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2k}}{2k!} \right) + a_1 \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right)$$

elde edilir. Bu serilerden birincisi Cosx in x=0 noktasındaki taylor serisine, ikinci Sinx in x=0 noktasındaki taylor serisine açılımına eşit olduğu görülür .O halde çözümü

$$y = a_0 \cos x + a_1 \sin x$$

şeklinde yazabiliriz. Burada a_0 ve a_1 e bir şart konmamıştır. (5) ve(6) denklemlerinden x=0 için y ve y' den buluruz.y(0) vey'(0) başlangıç koşulları keyfi olarak seçildiği için a_0 ve a_1 de keyfidir. Ancak özel olarak seçilirlerse belirli olurlar.

Örnek2

$$y'' - xy = 0, -\infty < x < \infty \quad y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x)^n \text{ şeklinde çözünüz.}$$

Çözüm:

Verilen denklemde $P(x)=1, Q(x)=0, R(x)=-x$ böylece her nokta adi noktadır. Burada $x_0=0$ alabiliriz. $x_0=0$ noktasının civarında kuvvet serine bakarsak

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+a_4x^4+\dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x)^n$$

$$y' = a_1 + 2a_2x + \dots + (n-1)a_{n-1}x^{n-2} + na_nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} na_nx^{n-1}$$

$$y'' = 2a_2 + \dots + (n-1)(n-2)a_{n-1}x^{n-3} + \dots = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2}$$

denklemde yerlerine konulursa

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^{n+1}$$

x^n parantezine alabilmek için bu eşitliğin sağ tarafındaki serinin indisini öteleyerek yani $n=1$ den başlatıp $n=n-1$ yazarsak ve sol taraftaki seriyi $n=1$ den başlayacak şekilde yazarsak

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2}x^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 2a_2 + 3.2a_3x + 4.3a_4x^2 + \dots = a_0x + a_1x^2 + a_2x^3 + a_3x^3$$

$$a_2=0 \text{ olmalıdır. } (2a_2=0, 3.2a_3x=a_0x, 4.3a_4x^2=a_1x^2)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ((n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1})x^n = 0$$

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}$$

olur.

$n=1$ için	$a_3=a_0/3*2$
$n=2$ için	$a_4=a_1/4*3$
$n=3$ için	$a_5=a_2/5*4=0$
$n=4$ için	$a_6=a_3/6*5=a_0/6*5*3*2$

n=5 için

$$a_7 = a_4/7 \cdot 6 = a_1/7 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 3$$

a_0 ve a_1 e bağlı

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots$$

$$y = a_0 + a_1x + \frac{a_0}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{a_1}{4 \cdot 3} x^4 + \dots$$

$$y = a_0(1 + x^3/6 + x^6/180 \dots) + a_1(x + x^4/12 + x^7/504 \dots)$$

Yukarıdaki eşitlikte parantez içlerine sırası ile y_1 ve y_2 diyelim. $a_0=1$, $a_1=0$ seçelim daha sonra da $a_0=0$, $a_1=1$ olarak seçelim. Buradan y_1 ve y_2 nin ayrı ayrı verilen diferansiyel denklemin çözümleri olduğu görülür. y_1 fonksiyonu $y_1(0)=1$, $y_1'(0)=0$ başlangıç koşullarını sağlar ve y_2 fonksiyonu $y_2(0)=0$, $y_2'(0)=1$ başlangıç koşullarını sağlar. Sonuç olarak y_1 ve y_2 lineer bağımsızdır ve genel çözüm

$$y = a_0y_1(x) + a_1y_2(x)$$

şeklinde dir.

Ödev:

- $y'' - xy = 0$, $-\infty < x < \infty$; eğri denkleminin $(x-1)$ kuvvet serisi şeklinde seri çözümünü bulunuz.
- $(1-x)y'' + y = 0$ diferansiyel denkleminin $x_0=0$ noktası civarında seri çözümünü bulunuz. (not: ilk 5 terime kadar açmanız yeterli)

ADİ NOKTA CİVARINDA SERİ ÇÖZÜMÜ

Bir önceki bölümde $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ polinom olmak üzere

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \quad (1)$$

şeklindeki diferansiyel denklemin x_0 noktası civarında çözümlerini aradık ve (1) denkleminin

$$y = \phi(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \quad (2)$$

şeklinde çözümünün arandığını $|x-x_0| < \rho$, $\rho > 0$ aralığında yakınsak olduğunu kabul ettik. a_n katsayıları (2) denklemi ve bu denklemin y ve y' türevleri alınıp bunlar (1) nolu denklemde yerlerine konularak bulunduğu anlatmıştık

(1) denkleminin $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ fonksiyonları analitik ise yukarıda verilen tanımlar ve kavramlar genişletilmek zorundadır

Tanım:

Eğer $p(x)=Q(x)/ P(x)$, $q(x)= R(x)/ P(x)$ fonksiyonları x_0 noktasında analitik ise (analitik= x_0 noktası civarında türevi varsa)

Bunlara karşılık gelen Taylor serileri:

$$p(x)=p_0+p_1(x-x_0)+\dots\dots\dots+p_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} p_n (x-x_0)^n$$

$$q(x)=q_0+q_1(x-x_0)+\dots\dots\dots+q_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q_n (x-x_0)^n$$

ise x_0 noktasına

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Q(x)}{P(x)} \frac{dy}{dx} + \frac{R(x)}{P(x)} y = 0 \Rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

denkleminin '**adi noktası**' denir. Aksi takdirde bu noktaya '**singular(tekil) nokta**' denir.

Teorem:

$x=x_0$ noktası; $p(x)=Q(x)/ P(x)$, $q(x)= R(x)/ P(x)$ fonksiyonları x_0 noktasında analitik olmak üzere

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{Q(x)}{P(x)} \frac{dy}{dx} + \frac{R(x)}{P(x)} y = 0 \Rightarrow y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

denkleminin bir adi noktası ise buradan denklemin genel çözümü

$$y_{genel} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x)$$

olur. Burada a_0 ve a_1 keyfidir, y_1 ve y_2 , x_0 da analitik lineer bağımsız seri çözümleridir. y_1 ve y_2 seri çözümlerinin yakınsaklık yarıçapları en azından p ve q ya karşılık gelen serilerin yakınsaklık yarıçapları kadar geniştir. $|x-x_0|=p$ ise seri yakınsakta ıraksak ta olabilir.

Örnek 1:

$x=x_0$ noktası civarında $(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y=0$ α (sabit) legendre denkleminin yakınsaklık yarıçapları için bir alt sınır bulunuz.

çözüm:

$$P(x) = (1-x^2), Q(x) = -2x, R(x) = \alpha(\alpha+1)$$

$$P(x)=0 \Rightarrow x = \pm 1$$

Böylece legendre denkleminin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklindeki bir seri çözümü en az $|x| < 1$ için yakınsaktır.

Örnek2:

$x=0$ noktası ve $x=-1/2$ noktası civarında $(1+x^2)y'' + 2xy' + 4x^2y = 0$ denkleminin yakınsaklık yarıçapları için bir alt sınır bulunuz.

çözüm:

$$P(x) = (1+x^2), Q(x) = -2x, R(x) = 4x^2$$

$$P(x)=0, \Rightarrow x = \pm i \text{ (kompleks)}$$

Kompleks düzlemde $x=0$ olan $\pm i$ noktalara uzaklık $z=0 \pm i$

$|z| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 = \rho$ dir $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ serileri en az $|x| < 1$ için yakınsaktır

Kompleks düzlemde $x=-1/2$ olan $\pm i$ noktalara uzaklık $z = -1/2 \pm i$ ile

$|z| = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} = \rho$ dir. $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ serileri en az $|x-x_0| < \rho$ $|x - \frac{1}{2}| < \frac{\sqrt{5}}{2}$ aralığında yakınsaktır.

REGÜLER, SİNGÜLER NOKTALAR

Bu bölümde $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ birer polinom olmak üzere

$$P(x) \frac{d^2 y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

denkleminin x_0 singüler noktası civarında çözümünü araştıracağız.

Bunun için

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{sonlu} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{sonlu}$$

ise bu koşulları sağlayan x_0 noktasına

$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ denkleminin ‘**Düzgün Tekil nokta(Regüler-Singüler Noktası)**’ denir.

Herhangi bir singüler noktası regüler-singüler nokta değilse bu noktaya

$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ denkleminin ‘**irregüler-singüler noktası**’ denir.

bu ifadeler $\frac{Q(x)}{P(x)} = p(x)$ singülerliğin $(x-x_0)^{-1}$ den ve $\frac{R(x)}{P(x)} = q(x)$ deki singülerliğin de $(x-x_0)^{-2}$ den kötü olamayacağını belirtir.

Polinomlardan daha genel fonksiyonlar içinse, x_0 noktasının regüler-singüler nokta olması için x_0 noktası singüler olmalı ve $(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$

ve $(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$ fonksiyonları x_0 noktasında Taylor serisine

açılabilmelidir

(Yani $(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}$ ve $(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$ fonksiyonları x_0 noktasında analitik olmalıdır).

Örnek

$2x(x-2)^2y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$ denkleminin singüler noktalarını bulunuz ve bu noktaları regüler ve irregüler olarak sınıflandırınız.

Çözüm:

$$\begin{aligned} P(x) &= 2x(x-2)^2 & P(x) &= 0 & 2x(x-2)^2 &= 0 & x &= 0, x=2 \text{ (singüler noktalar)} \\ p(x) &= \frac{Q(x)}{P(x)} = 3/2(x-2)^2 & q(x) &= \frac{R(x)}{P(x)} = (x-2)/2x(x-2)^2 \end{aligned}$$

$x = x_0 = 0$ noktası için:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x-x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{3}{2(x-2)^2} = 0 \quad \text{sonlu}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{x-2}{2x(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{2x(x-2)} = 0 \quad \text{sonlu}$$

limitler sonlu olduğundan x=0 noktası regüler-singüler noktadır

x= x₀ =2 noktası için:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \frac{3}{2(x-2)^2} = \infty$$

x=2 noktası irregüler-singüler noktadır.

Örnek 2:

$(x-\pi/2)^2 y'' + (\cos x)y' + (\sin x)y = 0$ denkleminin singüler noktalarını bulunuz ve bu noktaları regüler ve irregüler olarak sınıflandırınız.

Çözüm:

$P(x) = (x - \pi/2)^2$ $P(x)=0$ ile $(x - \pi/2)^2 = 0$ ve $x = \pi/2$ (singüler nokta) $Q(x) = \cos x$, $R(x) = \sin x$ analitik fonksiyonlar olduklarından

$$(x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = (x - \frac{\pi}{2}) \frac{\cos x}{(x - \frac{\pi}{2})^2} = \frac{\cos x}{(x - \frac{\pi}{2})}$$

$$(x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = (x - \frac{\pi}{2})^2 \frac{\sin x}{(x - \frac{\pi}{2})^2} = \sin x$$

fonksiyonları gözönüne alınır. Buradan $\frac{\cos x}{(x - \frac{\pi}{2})}$ için

y=cosx in $x_0 = \pi/2$ civarında taylor serisi

$$\cos x = y(x_0) + \frac{x - x_0}{1!} y'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} y''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} y'''(x_0) \quad \text{ile}$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{2} + \frac{x - \frac{\pi}{2}}{1!} (-\sin \frac{\pi}{2}) + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^2}{2!} (-\cos \frac{\pi}{2}) + \frac{(x - \frac{\pi}{2})^3}{3!} (\sin \frac{\pi}{2})$$

veya

$$\cos x = -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^3}{3!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^5}{5!}$$

olduğundan

$$\frac{\cos x}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)} = -1 + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{3!} - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{5!} \quad \text{bulunur bu seri her } x \text{ için yakınsar}$$

$\sin x$ in $x_0 = \pi/2$ civarında taylor serisi

$$\sin x = 1 - \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}{2!} + \frac{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4}{4!} \quad \text{taylor serisine açıldığından}$$

$x = \pi/2$ noktası regüler-singüler noktadır.

Ödev

1) $x^2(1-x^2)y'' + 2xy' + 4y = 0$ denkleminin singüler noktalarını bulunuz ve bu noktaları regüler ve irregüler olarak sınıflandırınız.

1.

2) $x^2y'' - 3\sin xy' + (1+x)^2y = 0$ denkleminin singüler noktalarını bulunuz ve bu noktaları regüler ve irregüler olarak sınıflandırınız.(Taylor serisi)

EULER DİFERANSİYEL DENKLEMİ

Regüler ve singüler noktaya sahip en basit diferansiyel denklem olarak

$$L(y) = x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0 \quad (1)$$

euler diferansiyel denklemini verebiliriz ($\alpha = \text{sabit}$, $\beta = \text{sabit}$ (reel sayı))

(1)denklemi için $x=0$ noktasının regüler ve singüler olduğu kolayca

$$\text{görülür} \left(\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\alpha x}{x^2} = \alpha, \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{R(x)}{P(x)} = \right.$$

$$\left. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \frac{\beta}{x^2} = \beta \right) \text{ sonlu}.$$

Çözüm için

$$y=x^r \text{ seçilir}$$

$$y' = rx^{r-1}$$

$$y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

(1) de yerlerine konulursa

$$r(r-1)x^{r-2} + \alpha x^{r-1} + \beta x^r = 0$$

$$r(r-1)x^r + \alpha rx^r + \beta x^r = 0$$

$$x^r(r^2 - r + \alpha r + \beta) = 0 \quad r^2 + r(\alpha - 1) + \beta = 0 \quad \text{2.derece denklem}$$

genel çözümler:

- Kökler reel ve birbirinden farklı ise (r_1, r_2)

$$y = c_1 x^{r_1} + c_2 x^{r_2}$$

- Kökler reel ve birbirine eşit ise ($r_1 = r_2 = r$)

$$y = (c_1 + c_2(\ln x))x^r$$

- Kökler kompleks ve eşlenik ise ($r_1, r_2 = \alpha \pm i\beta$)

$$y = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)]$$

dir.

Örnekler:

1) $x^4 y'' + x^3 y' = 4$ euler diferansiyel denklemini çözünüz.

çözüm:

$$y = x^r \text{ seçilir}$$

$$y' = rx^{r-1}$$

$$y'' = r(r-1)x^{r-2}$$

$$r(r-1)x^{r+2} + r x^{r+2} = 4$$

$$x^{r+2}(r^2 - r + r) = 4 \quad r^2 = 4 \quad r_1 = 2, \quad r_2 = -2$$

$$y = c_1 x^2 + c_2 x^{-2}$$

2) $2x^2 y'' + 3xy' - y = 0$ euler diferansiyel denklemini çözünüz

$$y = x^r \text{ seçilir}$$

$$\begin{aligned} y' &= rx^{r-1} & 2r(r-1)x^r + 3r x^r - x^r &= 0 \\ y'' &= r(r-1) x^{r-2} \end{aligned}$$

$$x^r[2r(r-1)+3r-1]=0 \quad 2r^2+r-1=0$$

$r_1=1/2$, $r_2=-1$ iki farklı reel kök

$$y=c_1x^{1/2}+c_2x^{-1}$$

3) $x^2y''+xy'+2y=0$ euler diferansiyel denklemini çözünüz

$$\begin{aligned} y &= x^r \text{ seçilir} \\ y' &= rx^{r-1} \\ y'' &= r(r-1) x^{r-2} \end{aligned}$$

$$r(r-1) x^r + rx^r + 2x^r = 0 \quad (r^2 - r + 2) x^r = 0$$

$$r^2+2=0 \quad b^2-4ac=-8<0 \quad r_1, r_2 = \pm\sqrt{2}i \text{ kompleks}$$

$$y = \alpha \pm i\beta \quad y = 0 \pm \sqrt{2}i \text{ genel çözüm}$$

$$y = x^\alpha [c_1 \cos(\beta \ln x) + c_2 \sin(\beta \ln x)]$$

$$y = c_1 \cos(\sqrt{2} \ln x) + c_2 \sin(\sqrt{2} \ln x)$$

4) $2x^2y''+xy'-3y=0$ $y(1)=1, y'(1)=4$ başlangıç koşulları ile diferansiyel denklemini çözünüz

5) $x^2y''-3xy'+4y=0$ $y(-1)=2$, $y'(-1)=3$ başlangıç koşulları ile diferansiyel denklemini çözünüz

6) $x^2y''+3xy'+5y=0$, $y(1)=1$, $y'(1)=1$ başlangıç koşulları ile diferansiyel denklemini çözünüz

BİR REGÜLER-SİNGÜLER NOKTA CİVARINDAKİ SERİ ÇÖZÜMLERİ

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0 \quad (1)$$

denkleminin $x_0=0$ singüler noktası civarında çözümünü araştıracağız. Bunun için

$$\lim_{x \rightarrow 0} (x) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad \text{sonlu} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} (x)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{sonlu}$$

ise $x=0$ (1) denkleminin regüler-singüler noktasıdır.

Bu nedenle bu fonksiyonlar $|x|<\rho, \rho>0$ civarında yakınsak kuvvet serilerine açılabilir.

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = p(x) \text{ ve } \frac{R(x)}{P(x)} = q(x) \text{ ile}$$

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (2)$$

(1) denkleminde $x p(x)$ ve $x^2 q(x)$ in görünebilmesi için (1) denklemini $P(x)$ e böler x^2 ile çarparsak:

$$x^2 y'' + x(xp(x))y' + x^2 q(x)y = 0 \quad (3)$$

$$x^2 y'' + x(p_0 + p_1 x + \dots + p_n x^n)y' + (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_n x^n)y = 0 \quad (4)$$

olur. Eğer

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (x) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (x)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad (5)$$

katsayıları hariç tüm p_n ve q_n ler sıfır ise (4) denklemi

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0 \quad (6)$$

euler dif. denklem şekline dönüşür. Genel durumda p_n ve q_n $n \geq 1$ sıfırdan farklıdır. Böylece (4) denkleminin çözümü euler denkleminin benzeridir.

$a_0 \neq 0$ olmak üzere

$$y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n)=x^r\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{r+n} \quad (7)$$

şeklinde çözümü olduğunu varsayıyoruz. Dolayısıyla (1) denkleminin çözümü için:

- (1) denklemi hangi r değerleri için (7) formunda bir çözüme sahiptir?
- a_n katsayıları için hangi regürans bağıntı vardır?
- $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ serilerinin yakınsaklık yarıçapları nelerdir ? sorularına yanıt verilmelidir.

Bu şekilde çözüm aramanın genel yolu Frobenius tarafından verilmiştir. Frobenius metodunu bir örnek üzerinde incelersek:

Örnek:
 $2x^2y'' - xy' + (1+x)y=0$ (8)

denklemini çözünüz.

Çözüm:

$P(x)=0$ ile $x=0$ noktası bu denklemin singüler noktasıdır.

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (x) \frac{Q(x)}{P(x)} = -1/2 \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (x)^2 \frac{R(x)}{P(x)} = 1/2 \text{ sonlu}$$

diğer tüm p ve q katsayıları sıfırdır. (8) denkleminin karşılık gelen euler denklemini (6) denkleminde yaralanarak

$$2x^2y'' - xy' + y=0 \quad (9)$$

denklemini yazarız. (8) denklemini çözebilmek için (7) formunda yani

$$y=x^r(a_0+a_1x+a_2x^2+.....+a_nx^n)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{r+n}$$

şeklinde çözümü olduğunu farz ederek birinci ve ikinci türevlerini alıp (8) nolu denklemde yerlerine koyarsak

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)a_nx^{r+n-1} \quad (10)$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_nx^{r+n-2} \quad (11)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2a_n(r+n)(r+n-1) x^{r+n} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n) x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+1} = 0 \quad (12)$$

(12) denkleminin son terimini $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^{r+n}$ şeklinde yazabiliriz. Tüm terimleri ortak toplam altında yazarsak

$$a_0(2r(r-1)-r+1)x^r + \sum_{n=1}^{\infty} (2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1)a_n + a_{n-1} x^{r+n} = 0 \quad (13)$$

Eğer (13) her x için sağlanıyorsa (13) denklemindeki her mertebeden x in katsayısı '0' olur. x^r nin katsayısından $a_0 \neq 0$ olduğundan

$$2r(r-1)-r+1=0 \quad (14)$$

elde edilir. (14) denkleminin (8) denkleminin '*indis denklemi*' denir. Bu indis denkleminin kökleri $r_1=1$ ve $r_2=1/2$ dir r nin bu değerlerine $x=0$ regüler-singüler noktasının singülerliliğinin kuvvetleri denir.

(13) denkleminde x^{r+n} katsayısını 0 a eşitlersek

$$(2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1)a_n + a_{n-1} = 0 \quad (15)$$

ile regürans bağıntısı (katsayılar arasındaki bağıntı)

$$a_n = -a_{n-1} / (2(r+n)(r+n-1)-(r+n)+1) \quad (16)$$

elde edilir. a_1 ve a_2 katsayılar kümesinin tümünü elde etmek için indis denkleminin her r_1 ve r_2 kökü için (16) nolu regürans bağıntısını kullanılırız.

$r=r_1=1$ için (16) nolu denklem $n \geq 1$ için

$$a_n = -a_{n-1} / (2(1+n)(1+n-1)-(1+n)+1) \quad a_n = -a_{n-1} / (2(1+n))n - n$$

$$a_n = -a_{n-1} / (2n+1)n$$

olur.

$$n=1 \text{ için } a_1 = -a_0/3$$

$$n=2 \text{ için } a_2 = -a_1/5*2 = a_0/5*2*3 \quad \text{hepsi } a_0 \text{ a bağlı}$$

$$n=3 \text{ için } a_3 = -a_2/7*3 = a_0/7*5*3*2*3$$

$$a_n = -(-1)^n / (2n+1)n! \quad n \geq 1$$

$a_0 = 1$ alarak a_0 katsayısını çıkarırsak (8) denkleminin çözümü

$$y_1(x) = x \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n+1)n!} \right] \quad (18)$$

(18) deki yakınsaklık yarıçapını bulmak için oran testini uygularsak

her x için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)^{n+1}}{a_n(x)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{(2n+3)(n+1)} = 0 \text{ olur.}$$

Buradan her x için seri yakınsar.

$r=r_1=1/2$ için (16) nolu denklem $n \geq 1$ için

$$a_n = -\frac{a_{n-1}}{n(2n-1)} \text{ regürans bağıntısı elde edilir. } n=1,2,3... \text{ verilerek}$$

a_i katsayıları belirlenir.

$$n=1 \text{ için } a_1 = -a_0/1*1$$

$$n=2 \text{ için } a_2 = -a_1/2*3 = a_0/(1*2)(1*3) \quad \text{hepsi } a_0 \text{ a bağlı}$$

$$n=3 \text{ için } a_3 = -a_2/3*5 = -a_0/(1*2*3)(1*3*5)$$

$$a_n = -(-1)^n / (2n-1)n! \quad n \geq 1 \quad (19)$$

$a_0 = 1$ alarak a_0 katsayısını çıkarırsak (8) denkleminin çözümü

$$y_2(x) = x^{1/2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n-1)n!} \right] \quad (20)$$

(20) deki yakınsaklık yarıçapını bulmak için oran testini uygularsak

her x için

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}(x)^{n+1}}{a_n(x)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{(2n+1)(n+1)} = 0 \text{ olur.}$$

Buradan her x için seri yakınsar. Böylece (8) denkleminin genel çözümü

$$Y_{\text{genel}} = C_1 Y_1(x) + C_2 Y_2(x)$$

olur.

BİR REGÜLER-SİNGÜLER NOKTA CİVARINDAKİ SERİ ÇÖZÜMLERİ (2.kısım)

Bu bölümde $L(y) = x^2 y'' + x(xp(x))y' + (x^2 q(x))y = 0$ (1) denkleminin genel çözümünü araştıracağız.

(1) denklemindeki

$$xp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n, \quad x^2 q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n \quad (2)$$

$|x| < \rho$ aralığında yakınsak serilerdir.

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = p(x) \text{ ve } \frac{R(x)}{P(x)} = q(x)$$

$x=0$ noktası regüler-singüler noktadır, yani

$$p_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (x) \frac{Q(x)}{P(x)} \quad q_0 = \lim_{x \rightarrow 0} (x)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \quad \text{sonlu}$$

katsayıları hariç tüm p_n ve q_n ler sıfır ise euler denklemi

$$x^2 y'' + p_0 x y' + q_0 y = 0 \quad (3)$$

şeklinde dir. ve (1) denkleminin çözümü $a_0 \neq 0$ olmak üzere

$$y = (\phi)(r, x) = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad (4)$$

şeklinde aranır, birinci ve ikinci türevleri alınarak (1) denkleminde yerlerine konur,

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1}$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n-2} \quad (5)$$

$a_0 r(r-1)x^r + a_1(r+1)x^{r+1} + \dots + (r+n)(r+n-1)a_n x^{r+n} + (p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \dots + p_n x^n)[a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + \dots + a_n x^{r+n} + \dots] + (q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \dots + q_n x^n)[a_0 x^r + a_1 x^{r+1} + \dots + a_n x^{r+n} + \dots] = 0$ bulunur. sonsuz terimleri çarpıp aynı mertebeden terimleri gruplarsak

$$L(\phi)(r, x) = a_0 [F(r)] x^r + \sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] x^{r+n} = 0 \quad (6)$$

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 \quad (7)$$

dir.

(6)denkleminin sağlanması için x in tüm kuvvetlerinin katsayıları sıfır olmalıdır **$a_0 \neq 0$ olduğundan x^r i içeren** $F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0$ olur Bu denkleme indis denklemi denir. bu indis denkleminin kökleri $r_1 > r_2$, r_1 ve r_2 reel kökleri olsun Bu r_1 ve r_2 ye singülerliğin kuvveti de denir.

(6)denkleminde x^{r+n} nin katsayısı 0 a eşitlersek

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}] = 0 \quad (8)$$

$n \geq 0$ için (1) denkleminin (4) formunda

$$y(x)\phi = x^r (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$$

ile

$$y_1(x) = |x|^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] \quad x > 0 \quad (9)$$

bir çözümü bulunur.

Burada $a_n(r_1)$ ler (8) rekürans denkleminde $a_0=1$, $r=r_1$ alınarak bulunur.

• Eğer $r_2 \neq r_1$ ise,

$$y_2(x) = |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_2) x^n \right] \quad x > 0 \quad (10)$$

bulunur

- Kökler eşit ise $r_2=r_1=r$ ise, (6) denklemi

$$L(\phi)(r_1, x) = a_0[F(r)]x^r = a_0(r-r_1)^2 x^r \quad (11)$$

formuna indirgenir. $F(r)$ nin katlı kökü olduğundan $r=r_1$ alırsak (11) denklemi $L(\phi)(r_1, x)=0$ bulunur. Dolayısıyla (1) denkleminin bir çözümü

$$y_1(x) = x^{r_1} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n \right] \quad x > 0$$

şeklinde bulunur. (11) denkleminde

$$L[\partial\phi/\partial r](r_1, x) = a_0 \partial/\partial r [(r-r_1)^2 x^r] = a_0 [(r-r_1)^2 x^r \ln x + 2(r-r_1) x^r] \quad (12)$$

bulunur. bundan yararlanarak (1) denkleminin ikinci çözümü

$$y_2(x) = \partial/\partial r (x^r [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n])_{r=r_1} = x^{r_1} \ln x [a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n(r_1) x^n] + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1) x^n =$$

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} a'_n(r_1) x^n \quad (13)$$

bulunur. (Burada $a'_n(r_1) = da_n/dr_1$). (13) denklemi daha basit olarak

$$y = y_1(x) \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n \quad (14)$$

formunda da bulunabilir.

- Kökler farklı bir tamsayı ise $(r_1-r_2=N)$

bu durumda

$$c_n(r_2) = \partial/\partial r [(r-r_2)a_n(r)] \quad (15)$$

katsayıları $a_0=1$ ve a_n de (8) nolu rekürans denkleminde elde edilerek bulunur. ayrıca a katsayısı

$$a = \lim_{r \rightarrow r_2} (r - r_2) a_n(r) \quad (16)$$

dır. $r_1-r_2=N$ ise ikinci çözüm:

$$y_2(x)=ay_1(x)\ln x+|x|^{r_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}c_n(r_2)x^n\right] \quad (17)$$

şeklinde bulunur.

Teorem:

$$x^2y''+x[xp(x)]y'+[x^2q(x)]y=0 \quad (1)$$

diferansiyel denklemi göz önüne alınsın $x=0$ noktası (1) denkleminin regüler-singüler noktasıdır. $x=0$ noktasında $xp(x)$ ve $x^2q(x)$ analitiktir ve ayrıca $|x|<\rho$ aralığında

$$xp(x)=\sum_{n=0}^{\infty}p_nx^n, \quad x^2q(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q_nx^n \quad (2)$$

serileri yakınsaktır.

$$F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0$$

- indis denkleminin kökleri r_1 ve r_2 olsun ve $r_1 \geq r_2$ şartı sağlansın bu durumda $-\rho < x < 0$ ve $0 < x < \rho$ aralıklarının birinde

$$y_1(x)=x^{r_1}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_1)x^n\right]$$

şeklinde bir çözüm bulunur. $a_n(r_1)$ ler (8)denkleminde $a_0=1$, $r=r_1$ alınarak bulunur.

- Eğer $r_2-r_1 \neq 0$ ve (+) bir tamsayı değilse, $-\rho < x < 0$ ve $0 < x < \rho$ aralıklarının birinde

$$y_2(x)=x^{r_2}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}a_n(r_2)x^n\right]$$

ikinci bir lineer bağımsız çözüm bulunur. $a_n(r_2)$ ler (8)denkleminde $a_0=1$, $r=r_2$ alınarak bulunur.

- $r_1=r_2$ ise ikinci çözüm

$$y_2(x)=y_1(x)\ln x+|x|^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n(r_1)x^n$$

- $r_1 - r_2 = N$ (kökler farkı pozitif tamsayı ise), ikinci çözüm

$$y_2(x) = a y_1(x) \ln x + |x|^{r_2} \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n(r_2) x^n \right]$$

şeklinde dir. Buradaki $a_n(r_1)$, $b_n(r_1)$, $c_n(r_2)$ katsayıları ve ‘a’ sabiti (1) denkleminde y yerine seri çözümleri konularak elde edilen formdan yararlanılarak bulunur. Basitlik için yukarıdaki denklemde $a=0$ seçilirse logaritmik değer kalkar, bu durumda son iki kısımdaki ($r_1=r_2$, ve $r_1-r_2=N$ kısımlarında elde edilen) serilerin her ikisi de $|x|<\rho$ aralığında yakınsar.

ÖDEV:

$2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$ regüler singüler noktalar civarında çözümlerin özelliklerini araştırınız.

BESSEL DENKLEMİ

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 + v^2)y = 0 \quad (v(\text{sabit})) \quad (1)$$

$x=0$ noktası regüler-singüler noktadır. Basitlik için $x>0$ durumu incelenmektedir. Bu bölümde Bessel denklemini

1. Sıfıncı mertebeden Bessel denklemi
2. 1/2. mertebeden Bessel denklemi
3. 1. mertebeden Bessel denklemi

olmak üzere 3 özel durumda ele alacağız. Bu hallerden 1/2. mertebeden Bessel denklemi açık olarak incelenecektir.

1/2. Mertebeden Bessel Denklemi

Burada ele alınacak örnek çözüm kökler farkının tamsayı ve ikinci çözümün logaritmik terim içermemesine aittir. ($v=1/2$ alırsak)

$$L(y) = x^2 y'' + xy' + (x^2 - 1/4)v^2)y = 0 \quad (b1)$$

olur. $y = \phi(r, x) = a_0 x^r + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{r+n}$ serisini (b1) de yerine koyarsak

$$L(\phi)(r, x) = \sum_{n=0}^{\infty} [(r+n)(r+n-1) + (r+n) - 1/4] a_n x^{r+n} = (r^2 - 1/4) a_0 x^r + [(r+1)^2 - 1/4] a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} [(r+n)^2 - 1/4] a_n x^{r+n} = 0 \quad (b2)$$

İndis denkleminin kökleri ($r_1 = 1/2$, ve $r_2 = -1/2$) dır. Regürans bağıntısı

$$((r+n)^2 - 1/4) a_n + a_{n-2} = 0 \quad n \geq 2 \text{ ile}$$

$$a_n = \frac{-a_{n-2}}{(r+n)^2 - 1/4} \quad (b3)$$

olur.

$r_1 = 1/2$ için (b2) denklemindeki x^{r+1} in katsayısından $a_1 = 0$ bulunur. Böylece (b3) denkleminde $a_3 = a_5 = \dots = a_{(2n+1)} = 0$ olur

$$r_1 = 1/2 \text{ için} \quad a_n = \frac{-a_{n-2}}{n(n+1)} \quad \text{veya} \quad a_{2n} = \frac{-a_{2n-2}}{2n(2n+1)} \quad a_n = 2, 4, 6 \text{ için}$$

$$a_2 = -a_0/3! \quad , a_4 = -a_0/5! \quad , \quad a_{2n} = (-1)^n a_0 / (2n+1)! \quad \text{Veya}$$

Böylece $a_0 = 1$ alırsak

$$y_1(x) = x^{1/2} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m+1)!} \right] = x^{-1/2} \left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!} \right] \quad (b4)$$

(b4) deki kuvvet serisi Sinx fonksiyonuna karşılık gelir. Böylece $1/2$ Bessel fonksiyonunun bir çözümü

$y_1(x) = x^{-1/2} \text{Sinx}$ olur. Buradan $1/2$ Bessel denklemini

$$J_{1/2} = (2/\pi)^{1/2} y_1, \quad J_{1/2}(x) = 2/x * \pi^{1/2} \text{Sinx} \quad x > 0 \quad (b5)$$

şeklinde bulunur.

$r_2 = -1/2$ için $N = r_1 - r_2 = 1$ olduğundan a_i katsayılarının bulunmasına dikkat edilmelidir. (b2) denkleminde görüleceği gibi x^r ve x^{r+1} Katsayıları 0 olur. Bu nedenle a_0 ve a_1 keyfi seçilebilir.

Regürans denkleminde çift indisli katsayılar a_0 a, tek indisli katsayılar, a_1 e bağlı olarak elde edilir (Bu nedenle ikinci çözümde logaritmik terim bulunmaz) Burada

$r=-1/2$ için

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2n!}, a_{2n+1} = \frac{(-1)^n a_1}{(2n+1)!} \quad \text{böylece}$$

$$y_2(x) = x^{-1/2} \left[a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2n!} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} \right]$$

$$y_2(x) = a_0 \cos x / x^{1/2} + a_1 \sin x / x^{1/2}, x > 0 \quad (b6)$$

Bessel denkleminin 2.çözümü

$$a_0 = (2/\pi)^{1/2} \quad a_1 = 0$$

alınarak elde edilir. bunu $J(-1/2)$ ile gösteririz. Buradan

$$J(-1/2)(x) = (2/(\pi x))^{1/2} \cos x \quad x > 0$$

Böylece (b1) denkleminin genel çözümü

$$y_{\text{genel}} = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$$

şeklinde bulunur.